استفاده از مدل ریاضی بهینه‌سازی چندهدفه استوار فازی در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه

محمدعلی جعفری[۱] مهدی خواجه‌زاده دزفولی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۳/۰۹/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۳/۱۱/۲۰

چکیده

مساله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به عنوان یکی از مسائل مهم در حوزه مهندسی مالی مطرح است. ارائهٔ مدل میانگین – واریانس موجب ایجاد انقلابی در مسائل انتخاب سبد سهام شد. هرچند مدل ارائه شده از لحاظ تئوری ویژگی‌های منحصر به فردی دارد، اما ضعف‌های آن مانع استفاده از مدل ارائه شده در عمل می‌گردد. از این رو تاکنون تحقیقات زیادی در زمینهٔ بهبود عملکرد مدل، در مسائل دنیای واقعی شده است. در این پژوهش، یک مدل چندهدفهٔ انتخاب سهام در نظر گرفته شده است و با علم به عدم قطعیت داده‌های مسأله، سعی در مدل‌سازی مسأله مذکور شده است. به طور خاص هدف در این مقاله ارائهٔ مدل چندهدفه استوار – فازی در مدل انتخاب سبد

۱. استادیار گروه ریاضیات مالی دانشگاه علوم اقتصادی، تهران، ایران(نویسنده مسئول)، m.a.jafari@ues.ac.ir

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه علوم اقتصادی، تهران، ایران، mehdezkh@gmail.com

– مقاله پیش رو، خلاصه‌ای از برخی از نتایج پایان نامه مطقع کارشناسی ارشد مهدی خواجه زاده دزفولی به راهنمایی دکتر محمدعلی جعفری می‌باشد.

سرمایه‌گذاری است. بر همین اساس پس از مطالعه رویکرد بهینه‌سازی چندهدفهٔ آرمانی، بهینه‌سازی استوار و بهینه‌سازی فازی سبد سرمایه‌گذاری، مدل چندهدفهٔ استوار فازی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ارائه می‌شود و **در انتها مدل ارائه شده با استفاده از داده‌های واقعی در بازه زمانی فروردین ۱۳۸۸ الی اسفند ۱۳۹۲ مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده کارایی روش مطرح شده به لحاظ در نظر گرفتن توام ریسک، بازدهی، مقدار بودجه و سقف سرمایه‌گزاری در هر سهم را نشان می‌دهد.**

واژگان کلیدی: سبد سرمایه گذاری بهینه، بهینه سازی استوار، برنامه‌ریزی آرمانی، منطق فازی

۱. مقدمه

انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، یکی از مهمترین مسائل در حوزه علوم مالی است که در آن تلاش می‌شود سرمایه مشخصی را به نحوی بین دارایی‌ها توزیع کرد تا به هدف یا اهداف خاصی دست پیدا کرد.

در رویکرد سنتی انتخاب پرتفوی، سرمایه گذار با هدف کسب بیشترین بازده مورد انتظار، بازده اوراق مختلف را تخمین می‌زند و سپس در اوراق بهاداری که بیشترین بازده مورد انتظار را دارد، سرمایه‌گذاری می‌کند. اما این دیدگاه در سال ۱۹۵۲ توسط مارکویتز مورد تردید قرار گرفت. از نظر مارکویتز توجه صرف به بازده سهام، کاری غیر عقلایی است، چرا که سرمایه‌گذار باید علاوه بر به حداکثر رساندن بازده، تا حد ممکن مراقب تحقق مطمئن این بازده نیز باشد. از سوی دیگر؛ اگر سرمایه‌گذاران تنها درپی به حداکثر رساندن بازده خود باشند، آن‌گاه می‌بایست تنها در یک نوع دارایی که بیشترین بازده را دارد، سرمایه‌گذاری کنند. از نظر مارکویتز، سرمایه‌گذاران باید به صورت هم‌زمان به دو پدیده ریسک و بازده توجه داشته باشند. براین اساس سرمایه‌گذاران با دو هدف متضاد مواجه هستند که باید در برابر یکدیگر موازنه شوند.

با وجود آن‌که روش تشکیل سبد سهام با روش "میانگین- واریانس" مارکویتز در سال‌های ابتدایی، روشی مسلط و غالب به شمار می‌آمد، از اویل دهه هفتاد میلادی اندک اندک در میان سرمایه‌گذاران علاقه وافری در مورد این‌که چگونه می‌توان علاوه بر «ریسک و بازده» معیارهای بیشتری را در فرایند انتخاب سبد سهام در نظرگرفت، شکل گرفت. برای پاسخ به این پرسش تحقیقات گسترده‌ای انجام شد، نهایتاً شاخه‌ای به نام انتخاب سبد سهام به وسیله تصمیم‌گیری چند معیاره در مباحث مالی به وجود آمد. در اصل، برنامه‌ریزی چندمعیاره باعث شد تا سرمایه‌گذار بتواند مدلی را طراحی کند که با دنیای واقعی تناسب بیشتری داشته باشد (خلیلی عراقی،۱۳۸۲).

پرکاربردترین رویکرد در حوزه تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه در حوزه انتخاب

سبد سهام، برنامه‌ریزی آرمانی است که اولین بار توسط چارنز و کوپر در سال ۱۹۶۱ ارائه شد. این روش به تصمیم‌گیران اجازه می‌دهد تا تغییرات و اشکال مختلفی از اهداف و محدودیت‌ها را با هم تلفیق کنند. در این روش اهداف چندگانه و متضاد برحسب اهمیت به طریقی مدل‌سازی می‌شوند که انحرافات بین اهداف مورد نظر و نتایج واقعی کمینه شوند.

بدون شک یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های مدل‌سازی‌ها انطباق مدل‌های ریاضی با واقعیت می‌باشد. با این حال در علوم مالی، عدم قطعیت، یکی از موارد قطعی است که طبعا این مساله مهم‌ترین مشکل در مدل‌سازی و تصمیم‌گیری در مورد انتخاب سبد مالی است. این در حالی است که فرض اساسی در برنامه‌ریزی ریاضی این است که؛ مقدار داده‌های ورودی دقیقا معلوم است و معادل مقادیر اسمی‌شان است. این فرض اثر عدم قطعیت در پارامترهای مساله را بر کیفیت و شدنی بودن مساله در نظر نمی‌گیرد (سجادی و همکاران، ۱۳۸۹). داده‌های دارای عدم قطعیت می‌توانند، در محدودیت‌ها و یا تابع هدف باشند. بنابراین اگر داده‌های ورودی در محدودیت‌ها مقداری غیر از مقدار اسمی خود بگیرند، ممکن است آن محدودیت نقض شود و یا حتی مساله نشدنی شود و اگر داده‌های ورودی تابع هدف از مقدار اسمی خود خارج شوند نیز ممکن است مساله از بهینگی خارج شود، و یا حتی جواب بهینۀ مسالۀ اسمی دیگر موجه نباشد.

بحث حاضر، این خواسته طبیعی را به ذهن متبادر می‌کند که مدل‌هایی طراحی شوند که در مقابل عدم اطمینان داده‌ها، ایمنی و حفاظت ایجاد کنند. روش‌های کلاسیک برای در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها، شامل آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی تصادفی می‌باشد. در آنالیز حساسیت، ابتدا عدم قطعیت به طور کلی نادیده گرفته می‌شود و بعد از حل مساله با آنالیز حساسیت تاثیر عدم قطعیت داده‌ها در مساله مورد بررسی قرار می‌گیرد. هرچند آنالیز حساسیت ابزار مناسبی برای بررسی میزان خوبی جواب می‌باشد، اما راه مناسبی برای تولید جواب‌هایی که در مقابل تغییرات داده‌ها استوار باشند، نیست. از طرف دیگر امکان استفاده از آنالیز حساسیت در

مدل‌هایی با پارامترهای عدم قطعیت زیاد وجود ندارد.

در بهینه سازی تصادفی نیز، فرض می‌شود که تابع توزیع پارامترهای ورودی داده شده است. اما باید توجه داشت؛ خیلی بعید است که بتوان تابع توزیع قطعی پارامترهای دارای عدم قطعیت را بدست آورد. همچنین تغییر پارامترها ممکن است باعث به هم خوردن خصوصیت تحدب پیچیدگی محاسباتی مساله گردد. این مساله و مشکلات ناشی از آن باعث شد محققان روی روش‌های بهینه‌سازی کار کنند که نسبت به عدم قطعیت مصون باشند و در نهایت منجر به ایجاد روشی شد که اصطلاحا به آن بهینه‌سازی استوار گویند.

روش‌های قطعی (غیر استوار)، مقادیر معینی را برای پارامترها در نظر می‌گیرند و جواب بهینه‌ای را حاصل می‌کنند. در مقابل روش‌های استوار جوابی را نزدیک به بهینه ارائه می‌کنند و هزینه بالاتر (به عبارت دیگر بازده را پایین تر) نشان می‌دهند، اما جواب به دست آمده با اطمینان بالایی قابل اتکا و معتبر است. به عبارتی، با لحاظ تغییر پذیری مقادیر پارامترها روی طیفی (بازه‌ای) از مقادیر جواب، همچنان با اطمینان بالایی قابل اتکا می‌باشد (ونلندوم،۲۰۰۲).

اولین قدم در راستای مدل‌سازی استوار، از سوی سویستر در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای تولید جوابی که برای همه داده‌های متعلق به یک مجموعه محدب، موجه باشند، ارائه شد. مدل مذکور جواب‌هایی را ارائه می‌کند که در برابر بهینگی مساله اسمی به منظور اطمینان از استواری به شدت محافظه‌کارانه است. درحقیقت این مسأله از اولین مسائل بهینه سازی استوار می‌باشد. پس از آن، گام‌های مهم دیگری به طور مستقل در توسعه تئوری بهینه‌سازی استوار، به وسیله بن تال و نمیرسکی، ال قاووی و لبرنت، ال قاووی و همکاران و برتسمیس و سیم انجام شد. در مدل‌های بهینه‌سازی استوار مثل برتسیمس و سیم، عدد وسط این بازه‌ها، به عنوان مقدار اسمی نام‌گذاری شده‌است. در مواردی، از مسائل واقعی برای تصمیم‌گیرنده، تعیین دقیق طول بازه‌ای که این عدد اسمی در آن نوسان می‌کند، آسان نمی‌باشد و تعیین طول

بازه با ابهاماتی مواجه است. به عبارتی اگر تصمیم گیرنده، طول بازه را بالا لحاظ کند، سطح محافظه‌کاری را افزایش و هزینه بالاتری متحمل می‌شود. برعکس اگر طول بازه را پایین لحاظ کند، ریسک تصمیم‌گیری را بالا برده است. علاوه بر بحث توازن بین ریسک و هزینه (بازده) در مواقعی به طور واقعی تصمیم‌گیرنده طول بازه را با ابهام بیان می‌کند. به منظور رفع این مشکل، رویکردی بیان می‌شود که تصمیم‌گیرنده قادر است طول بازه‌ها را به صورت عدد فازی بیان کند و ریسک متعادلی داشته‌باشد.

در این راستا، در مقاله حاضر سعی می‌شود مدل چند هدفهٔ لی و چیسر شامل اهداف آرمانی مربوط به حداکثر بودجه قابل استفاده، بازده انتظاری هر سهم، ریسک (بتای) سرمایه‌گذاری، حداکثر سرمایه‌گذاری در هر سهم، ترجیح سرمایه‌گذار برای اوراق دارای بتای معین، بیشینه‌سازی عایدی سبد سرمایه‌گذاری براساس رویکرد استوار برتسیمس و سیم در محیط فازی توسعه داده شود و نهایتا نتایج آن با پیاده سازی (براساس سهام منتخب) در بازار کشور بررسی می‌گردد.

۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

آرمان‌ها یا اهدافی که یک سازمان درصدد رسیدن به آن‌هاست، بسته به نوع فعالیت‌های هر سازمان متنوع است. در عمل به دلیل وجود چند هدف، مدیران در بسیاری از تصمیم‌ها به جای جستجوی یک جواب بهینه، به دنبال دستیابی به یک جواب رضایت‌بخش هستند. به علاوه شرایط و محدودیت‌ها در دنیای واقعی همیشه خشک و سخت نیستند به طوری که انحراف و مغایرتی از آن‌ها ممکن نباشد، بلکه در بسیاری از موارد، به خصوص زمانی که بده - بستان (موازنه) مجاز باشد، امکان تخطی از آن ها قابل قبول خواهد بود.در برنامه‌ریزی خطی معمولی، امکان تخطی از محدودیت‌ها وجود ندارد. حتی با وجود یک هدف در بعضی از مسائل رعایت تمامی محدودیت‌های خشک موجب می‌شود که؛ مسئله فاقد منطقه‌ی موجه شود، بنابراین فاقد جواب باشد. برنامه‌ریزی آرمانی رویکردی است که به کمک آن می‌توان بر دو

مشکل فوق (یک هدفه بودن و محدودیت های خشک) فایق شد. اگرچه برنامه‌ریزی آرمانی شکل توسعه‌یافته‌ای از برنامه‌ریزی خطی است ولی چیزی بیش از یک توسعه صرف است، چرا که قادر است آرمان‌های مختلف را مورد توجه قرار دهد. همچنین انحراف از آرمان‌ها را مجاز می‌داند و از این رو انعطاف‌پذیری را در فرآیند تصمیم‌گیری ایجاد می‌کند. سرانجام این امکان را نیز فراهم می‌کند که ترجیهات تصمیم گیرنده در مورد اهداف چندگانه و متضاد در نظر گرفته شود. وقتی شرکتی با چند هدف متضاد روبه‌رو است، ممکن است مقدور نباشد که تمامی آن اهداف را در حد دلخواه محقق سازد. برای مثال، اگر شرکتی دو هدف رشد سالیانه ۱۵درصد و سود هر سهم۱۰۰۰ تومان را در نظرداشته باشد، ممکن است تحقق هر دو ممکن نباشد. مدل برنامه‌ریزی آرمانی تلاش می‌کند، سطح رضایت بخشی از هردو را (باتوجه به اولویت هر یک) تأمین نماید که از نظر آن اولویت، بهترین جواب محسوب می‌شود. از این رو اهداف اولویت بالاتر را می‌توان در ازای نادیده‌گرفتن تمام یا بخشی از اهداف با اولویت پایین‌تر محقق ساخت.

در مسئله انتخاب سبد نیز سرمایه گذاران، اهدافی را مدنظر قرار می‌دهند که به صورت هم‌زمان متضاد و متناقض هستند، به همین جهت تکنیک‌های برنامه‌ریزی با اهداف چندگانه مثل برنامه‌ریزی آرمانی برای انتخاب بهترین سبد سهام به منظور برآورده ساختن اولویت‌ها و امیال تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شوند. برنامه‌ریزی آرمانی در زمینه انتخاب سبد یک روش تحلیلی محسوب می‌شود که به منظور پرداختن به مشکلات تصمیم‌گیری مالی طراحی شده است، که در آن؛ اهداف به مشخصه‌های سبد سهام نسبت داده شده‌اند. همچنین در آن، فرد تصمیم‌گیرنده علاقمند است عدم دستیابی به اهداف مربوطه را به حداقل رساند(عبدالعزیز و همکاران ۲۰۰۷). عنصری کلیدی برای مدل برنامه‌ریزی آرمانی، تابع هدفی می‌باشد که میزان به حداقل رساندن متغییرهای انحرافی ناخواستهٔ مربوط به اهداف مدل را اندازه گیری می‌کند (رمورو ۲۰۰۴).

برای حل مسائل مربوط به بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، مدل‌های آرمانی مختلفی توسعه داده شده است. در سال ۱۹۸۰ لی و چیسر مدلی کاربردی ارائه نمودند. تصور کنید که $J = \{1,2,\dots,n\}$ مجموعه‌ی اوراق بهادار مورد نظر برای سرمایه‌گذاری باشد به طوری که نرخ بازگشت سرمایه مربوط به هر کدام از این اوراق بهادار $j \in J$ برابر با متغیر تصادفی R_j و با میانگین داده شده $\mu_j = E[R_j]$ باشد و نیز $X = (x_j)$,$j = 1,2,\dots,n$ مبلغ سرمایه‌گذاری شده در پرتفوی (متغیرهای تصمیم) می‌باشد. براین اساس مدل لی و چیسر (۱۹۸۰) به صورت زیر است:

$$\min W_1 d_1^+ + W_2(d_2^- + d_3^-) + W_3 \sum_{i=4}^{n+3} d_i^+ + W_4 \sum_{i=n+4}^{2n+3} d_i^- + W_5 d_{2n+4}^- \quad (۱)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j + d_1^- - d_1^+ = BC \quad (۲)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j + d_2^- - d_2^+ = DR \quad (۳)$$

$$\sum_{j=1}^{n} B_j x_j + d_3^- - d_3^+ = B(BC) \quad (۴)$$

$$x_j + d_{j+3}^- - d_{j+3}^+ = V_j \quad (۵)$$

$$x_j + d_{2n+2+j}^- - d_{2n+2+j}^+ = D_j \quad (۶)$$

$$BC + \sum_{j=1}^{n} R_j x_j + d_{2n+4}^- - d_{2n+4}^+ = M \quad (۷)$$

هدف (۲) محدودیت بودجه را درنظر می‌گیرد. هدف (۳) نیز بر روی نرخ بازگشت سرمایه پرتفوی که می‌بایست بیشتر از DR (کل عایدی پرتفوی که براساس نظر سرمایه گذار تعیین می‌شود) تمرکز دارد. هدف (۴) ریسک سیستماتیک پرتفوی را مورد توجه قرار می‌دهد. اگر سرمایه‌گذار پیش‌بینی کند که وضعیت بازار در روزهای

آتی بهبود می‌یابد، وی می‌بایست بتای پرتفوی خود را نزدیک بتای بازار انتخاب کند، و در حالتی که پیش بینی رکود در بازار می کند ، می بایست بتای سبد خود را مخالف وضعیت بازار در نظر گیرد. اهداف (۵) و (۶) محدودیت سرمایه‌گذاری در هرکدام از اوراق بهادار و نیز هدف را در نظر می‌گیرد و نهایتا معادله (۷) بر بیشینه‌سازی جمع بودجه و بازده سبد تمرکز می‌کند.

W_1 الی W_5 بیانگر اولویت‌های داده شده به اهداف (محدودیت‌ها) می‌باشند، که طبق نظر سرمایه‌گذار تعیین می‌گردند. x_j متغیر تصمیم است که بیانگر مقدار پول سرمایه‌گذاری شده در ورقه j ام است.BC بودجه تخصیص داده شده جهت سرمایه‌گذاری و R_j بازده مورد انتظار می‌باشد که از فرمول $R_{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{P_{t+1}} - \mathrm{P_t} + \mathrm{D_t}}{\mathrm{P_t}}$ بدست می‌آید.

P_t قیمت سهم در زمان t ام؛ D_t سود تقسیمی سهم مذکور، DR کل عایدی مورد انتظار سرمایه‌گذاری، B_j بتای مورد انتظار هر سهم سبد سرمایه‌گذاری، B ریسک سیستماتیک مورد انتظار، V_j حداکثر سرمایه‌گذاری مورد انتظار سرمایه گذار در ورقه jام، D_j مقدار مورد انتظار سرمایه‌گذاری در ورقه i ام براساس بتای ورقه j ام و نهایتا M یک عدد بزرگ می‌باشد.

مدل فوق با این‌که از لحاظ تئوری، مدلی بسیار مناسب به شمار می‌رود، اما نتایج آن در عمل چندان مناسب نیست. عمده مشکل این مدل بی توجهی به عدم قطعیت مربوط به پارامترهایی همچون ریسک (بتا) و بازده است. همان‌طور که می‌دانیم، جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی در یک نقطه منتهی الیه یا روی لبه ناحیه شدنی واقع است. یک اغتشاش کوچک در داده‌های ورودی ممکن است به راحتی جواب نهایی را ناممکن سازد. از این رو نیاز به بررسی عدم قطعیت به عنوان بخشی از پارامترهای ورودی و ارائه روش‌های جدید برای مدیریت عدم قطعیت وجود دارد.

در سال‌های اخیر، برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها، رویکردی به نام بهینه‌سازی استوار بسط داده شده است. در بهینه‌سازی استوار به دنبال استوارکردن مدل‌های

بهینه‌سازی نسبت بـه نقـض محـدودیت‌هـا هسـتیم. ایـن کـار از طریـق حـل مسـائل «نظیراستوار[1]»، برای مجموعه‌های غیرقطعی از پارامترهای غیرقطعـی انجـام مـی‌شـود. نظیراستوار در واقع بدترین حالت فرمول‌بندی مسئله اصلی از نظر انحراف پارامترهـا از مقادیر اسمی آنها اسـت. البتـه، معمـولاً ایـن سـناریوهای بـدترین حالـت، بـه نحـوی هوشمندانه تعریف می‌شوند، که منجر به فرمول‌بندی‌های محافظه‌کارانـه نشـود. عمومـا زمانی که هیچ گونه اطلاعاتی در مورد احتمال پارامترها در دسـترس نیسـت، از مفهـوم استوار برای برخورد با عامل عدم قطعیت استفاده می‌شود. این‌گونه مسائل می‌توانند هم به طور گسسته و هم پیوسته مطرح شوند. پارامترهای گسسته بـا رویکـرد سـناریوبندی مدل‌سازی می‌شوند و پارامترهای پیوسته نیز عموما فرض می‌شود که در بازه‌ای از قبـل تعیین شده، تغییر می‌کنند. این نوع عدم قطعیت، به عدم قطعیت بازه‌ای معروف است و پارامترهای مدل در این روش، پارامترهای نادقیق بازه‌ای نامیده می‌شوند.

سویستر (۱۹۷۳) اولین کسی است که ایدهٔ بهینه‌سازی استوار را معرفی می‌کنـد؛ امّـا ایدهٔ او بسیار بدبینانه است که از این لحاظ، این مدل در میان محققان نـامطلوب اسـت. بن– تال و نمیرفسکی (۱۹۹۸) یک روش استوار را توسعه دادند که در آن جـواب‌هـای بهینه خوش‌بینانه‌تر هستند. ایده آنها از نقطهٔ درونی[2] براساس یک الگوریتم، برای یـافتن جواب استوار به عنوان قسمتی از مدل اولیه استفاده می‌کند. آن‌ها همچنین روش استوار خود را روی چندین مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به کار مـی‌برنـد و نشـان مـی‌دهنـد کـه جواب نهایی در مقابل عـدم قطعیـت روی پارامترهـای ورودی مختلـف شـدنی، بـاقی می‌ماند. پارامتر Ω پیشنهاد شده، احتمال انحـراف از محـدودیت‌هـای اسـمی را کنتـرل می‌کند. پیاده‌سازی بهینه‌سازی بن – تال و نمیرفسکی (۲۰۰۲) به طور نرمال یک مسئله برنامه‌ریزی خطی عادی را به مسئله غیرخطی محدب تغییر می‌دهد. این امر روش آنهـا را برای کسانی که عادت به استفاده از روش‌های بهینه‌سازی متعارف دارند، غیرمحبوب

1. Robust counterpart
2. Interior

کرده است. برتسمیس و سیم (۲۰۰۴) روش‌های بهینه‌سازی استوار مختلفی را در تلاش برای حفظ ساختار مسئله اصلی، توسعه داده‌اند. با وجودی که روش آن‌ها جواب‌هایی را به دست نمی‌دهد که مانند روش بن–تال خوش‌بینانه باشد، ساختار مسئله اصلی مانند قبل خطی باقی می‌ماند و آن را مطلوب‌تر می‌سازد. چندی بعد آذر و ربیعه (۲۰۱۱) با بهره‌گیری از منطق فازی و توسعه مدل برتسمیس و سیم، مدل استوار – فازی ارائه کردند که علاوه بر ویژگی‌های مدل مذکور، قابلیت جدیدی را نیز به تصمیم‌گیرندگان می دهد. محققان با توجه به آگاهی نداشتن از شکل توزیع برخی از پارامترها، این نوع پارامترها را به صورت عدد تصادفی نوسان کننده در بازه ای متقارن لحاظ نمودند. در مدل های بهینه‌سازی استوار مثل برتسمیس و سیم، عدد وسط بازه‌ها به عنوان مقدار اسمی نام‌گذاری شده‌است. در مواردی از مسائل واقعی برای تصمیم-گیرنده، تعیین دقیق طول بازه با ابهاماتی مواجه است، به عبارتی اگر تصمیم‌گیرنده طول بازه‌ها را بالا لحاظ کند؛ سطح محافظه‌کاری را افزایش و هزینه بالاتری متحمل می‌شود. برعکس اگر طول بازه را پایین لحاظ کند، خطرپذیری تصمیم گیری را بالا برده است. علاوه بر بحث توازن بین خطرپذیری و هزینه، در مواقعی به طور واقعی تصمیم گیرنده طول بازه را با ابهام بیان می‌کند. به منظور رفع این مشکل، آذر و همکاران رویکردی ابداعی را ارائه کردند که تصمیم گیرنده قادر است طول بازه‌ها را به صورت عددی فازی بیان کنند و خطر پذیری متعادلی داشته باشد (آذر و همکاران ۱۳۹۲).

۳. مدل بهینه‌سازی استوار سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی

در این بخش، با استفاده از مدل برنامه‌ریزی آرمانی لی و چیسر (۱۹۸۰) به صورت استوار (رویکرد برتسیمس و سیم ۲۰۰۴) توسعه داده می شوند .در مدل لی و چیسر محدودیت‌های (۳) ، (۴) و (۷) عدم قطعی هستند و می‌بایست به صورت زیر تغییر یابند:

$$-\sum_{j=1}^{n} R_j\, x_j + d_2^- - d_2^+ = -DR \qquad (۸)$$

$$-\sum_{j=1}^{n} B_j\, x_j + \ d_3^- - d_3^+ = -B(BC) \tag{۹}$$

$$-BC - \sum_{j=1}^{n} R_j\, x_j + \ d_{2n+4}^- - d_{2n+4}^+ = -M \tag{۱۰}$$

معادله (۱) نیز به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\min W_1 d_1^+ + W_2(d_2^+ + d_3^+) + W_3 \sum_{i=4}^{n+3} d_i^+ + W_4 \sum_{i=n+4}^{2n+3} d_i^- + W_5 d_{2n+4}^+ \tag{۱۱}$$

در محدودیت‌های (۸) و (۱۰) ، R_j دارای عدم قطعیت است. همچنین در محدودیت (۹) ، B_j این‌چنین است. به نظر می‌رسد که R_j در محدودیت (۸) و (۱۰) مشابه باشند، لذا در این مقاله، از یک پارامتر در این دو محدودیت استفاده می‌شود.

حال تصور کنید که J_i مجموعه ضرایب R_j و B_j به طوری که $i = \{1,2\}$,$j \in J_i$ باشند به طوری که $j \in J_1$,R_j و $j \in j_2$,B_j مقادیری براساس توزیعی متقارن با میانگین مقدار اسمی R_j و B_j در بازه $[R_j - \hat{R}_j , R_j + \hat{R}_j]$ و $[B_j - \hat{B}_j , B_j + \hat{B}_j]$ اختیار می‌کنند. برای هر $i = \{1, 2\}$ پارامتر Γ_i این گونه معرفی می‌کنیم که لزوما عدد صحیح نیست و مقادیری در بازه $[0, |J_i|]$ اختیار می‌کند. لذا فرمول ها به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\min W_1 d_1^+ + W_2(d_2^+ + d_3^+) + W_3 \sum_{i=4}^{n+3} d_i^+ + W_4 \sum_{i=n+4}^{2n+3} d_i^- + W_5 d_{2n+4}^+ \tag{۱۲}$$

s

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j + \ d_1^- - d_1^+ = BC \tag{۱۳}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} R_j\, x_j + \ d_2^- - d_2^+ + \max_{\{s_1\cup\{t_1\}|s_1\subseteq J_1,|s_1|=\Gamma_1\ ,t_1\in J_1,s_1\}} \times \left\{ \sum_{j\in S_1} \hat{R}_j y_j + (\Gamma_1 - \lfloor\Gamma_1\rfloor)\hat{R}_{t_1} y_t \right\} = -DR \quad (۱۴)$$

$$-\sum_{j=1}^{n} B_j\, x_j + \ d_3^- - d_3^+ + \max_{\{s_2\cup\{t_2\}|s_2\subseteq J_2,|s_2|=\Gamma_2\ ,t_2\in J_2,s_2\}} \left\{ \sum_{j\in S_2} \hat{R}_j y_j + (\Gamma_2 - \lfloor\Gamma_2\rfloor)\hat{B}_{t_2} y_t \right\} = -B(BC) \quad (۱۵)$$

$$x_j + \ d_{j+3}^- - d_{j+3}^+ = V_j \quad (۱۶)$$

$$x_j + \ d_{2n+2+j}^- - d_{2n+2+j}^+ = D_j \quad (۱۷)$$

$$-BC - \sum_{j=1}^{n} R_j\, x_j + \ d_6^- - d_6^+ + \max_{\{s_1\cup\{t_1\}|s_1\subseteq J_1,|s_1|=\Gamma_1\ ,t_1\in J_1,s_1\}} \left\{ \sum_{j\in S_1} \hat{R}_j y_j + (\Gamma_1 - \lfloor\Gamma_1\rfloor)\hat{R}_{t_1} y_t \right\} = -M \quad (۱۸)$$

$$-y_j \le x_j \le y_j \quad (۱۹)$$

$$y_j \ge 0 \quad (۲۰)$$

اگر Γ_i عدد صحیح انتخاب شود آن‌گاه براساس مدل برتسیمس و سیم (۲۰۰۴) داریم:

$$B_1(\mathrm{x},\Gamma_1)=\max_{\{s_1|s_1\subseteq J_1,|s_1|=\Gamma_1\}}\left\{\sum_{j\in S_1}\hat{R}_j|x_j|\right\} \tag{۲۱}$$

$$B_2(\mathrm{x},\Gamma_2)=\max_{\{s_2|s_2\subseteq J_2,|s_2|=\Gamma_2\}}\left\{\sum_{j\in S_2}B_j|x_j|\right\} \tag{۲۲}$$

به منظور بازنویسی فرمول عبارت‌های (۳-۱۲) و (۳- ۲۰) به صورت مدل بهینه‌سازی خطی براساس مدل برتسمیس و سیم (۲۰۰۴) می‌بایست به صورت زیر عمل کرد:

$$B_1(\mathrm{x}^*,\Gamma_1)=\max_{\{s_1\cup\{t_1\}|s_1\subseteq J_1,|s_1|=\Gamma_1,t_1\in J_1,s_1\}}\left\{\sum_{j\in S_1}\hat{R}_j|x^*{}_j|+(\Gamma_1-\lfloor\Gamma_1\rfloor)\hat{R}_{t_1}|x^*{}_j|\right\} \tag{۲۳}$$

$$B_2(\mathrm{x},\Gamma_2)=\max_{\{s_2\cup\{t_2\}|s_2\subseteq J_2,|s_2|=\Gamma_2,t_2\in J_2,s_2\}}\left\{\sum_{j\in S_2}\hat{R}_j|x^*{}_j|+(\Gamma_2-\lfloor\Gamma_2\rfloor)\hat{B}_{t_2}|x^*{}_j|\right\} \tag{۲۴}$$

محدودیت‌های (۲۳) و (۲۴) براساس مدل برتسمیس و سیم (۲۰۰۴) به صورت زیر معادل توابع هدف مساله بهینه سازی می‌شوند:

$$B_1(\mathrm{x}^*,\Gamma_1)=max\sum_{j\in J_1}\hat{R}_j|x_j^*|Z_{1j} \tag{۲۵}$$

S.t

$$\sum_{j\in J_1}Z_{1j}\leq\Gamma_1 \tag{۲۶}$$

$$0\leq Z_{1j}\leq 1\ ,\quad \forall j\in J_1 \tag{۲۷}$$

و

$$B_2(x^*,\Gamma_2) = max \sum_{j\in J_2} \hat{B}_j |x_j^*| Z_{2j} \quad (۲۸)$$

S.t

$$\sum_{j\in J_2} Z_{2j} \le \Gamma_2 \quad (۲۹)$$

$$0 \le Z_{2j} \le 1 \ , \quad \forall j \in J_2 \quad (۳۰)$$

مقادیر حل بهینه مربوط به عبارات (۲۵) تا (۲۷) و نیز (۲۸) تا (۳۰) شامل متغیرهایی به صورت $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ و $\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor$ می باشند که دوگان مربوط به عبارت های (۲۵) تا (۲۷) و نیز (۲۸) تا (۳۰) به صورت زیر هستند:

$$\min \sum_{j\in J_1} P_{1j} + \Gamma_1 Z_1 \quad (۳۱)$$

S.t

$$Z_1 + P_{1j} \ge \hat{R}_j |x_j^*| \quad ,\forall j \in J_1 \quad (۳۲)$$

$$P_{1j} \ge 0 \ , \quad \forall j \in J_1 \quad (۳۳)$$

$$Z_1 \ge 0 \quad (۳۴)$$

و

$$\min \sum_{j\in J_2} P_{2j} + \Gamma_2 Z_2 \quad (۳۵)$$

s.t

$$Z_2 + P_{2j} \ge \hat{B}_j |x_j^*| \quad ,\forall j \in J_2 \quad (۳۶)$$

$$P_{2j} \ge 0 \ , \quad \forall j \in J_2 \quad (۳۷)$$

$$Z_2 \ge 0 \quad (۳۸)$$

براساس قضیه قوی دوگان اگر مساله در عبارات (۲۵) تا (۲۷) و نیز (۲۸) تا (۳۰) برای هر $\Gamma_i \in [0\ , |J_i|]\ ,\ \ i \in \{1,2\}$ شدنی و محدود باشد، آن‌گاه دوگان مساله در عبارات (۳۱) تا (۳۴) و (۳۵) تا (۳۸) نیز شدنی و محدود می‌باشند. عبارات (۱۲) تا (۲۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$x_j + d_4^- - d_4^+ = V_j \quad (۹۴)$$

$$x_j + d_5^- - d_5^+ = D_j \quad (۹۵)$$

$$-BC - \sum_{j=1}^{n} R_j x_j + d_6^- - d_6^+ + Z_1\Gamma_1 + \sum_{j=1}^{n} P_{1j} = -M \quad (۹۶)$$

$$Z_1 + P_{1j} + \lambda\big(\bar{R}_{(\max i)} - \bar{R}_{(\min i)}\big)y_j \geq \bar{R}_{(mini)}y_j \quad (۹۷)$$

$$Z_2 + P_{2j} + \lambda\big(\bar{B}_{(\max i)} - \bar{B}_{(\min i)}\big)y_j \geq \bar{B}_{(mini)}y_j \quad (۹۸)$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \quad (۹۹)$$

$$0 \leq P_j\ ,\quad 0 \leq y_i,\quad 0 \leq Z_1\ ,\quad 0 \leq Z_2\ ,\quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (۱۰۰)$$

۵. نتایج حل مدل استوار برنامه‌ریزی آرمانی و مدل استوار – فازی برنامه ریزی آرمانی

مدل ارائه شده در بخش قبل، یک مدل خطی می‌باشد که توسط نرم‌افزار Lingo به راحتی قابل حل است. داده‌ها مربوط به ۲۰ سهم است که به صورت ماهانه از ابتدای فروردین ۱۳۸۸ تا پایان اسفند ۱۳۹۲ از بازار بورس اوراق بهادار تهران جمع آوری شده‌اند.

پس از کدنویسی مدل‌های فوق در نرم افزار lingo نتایج زیر به ازای سطوح مختلف از محافظه‌کاری حاصل شد:

جدول ۱ - مقدار بازده و ریسک بتای بیست سهم منتخب

سهم	بازده (به درصد)	ریسک بتا	سهم	بازده (به درصد)	ریسک بتا	سهم	بازده (به درصد)	ریسک بتا	سهم	بازده (به درصد)	ریسک بتا
X1	4.114857	1.161840042	X6	3.77219	1.156955632	X11	2.878131	1.054487849	X16	2.928492	0.577805824
X2	2.401771	0.715723679	X7	1.877396	0.476679343	X12	17.81579	-1.619897535	X17	3.276491	0.817596332
X3	3.363353	0.982667358	X8	1.990902	0.262528597	X13	2.345551	0.501443392	X18	0.280688	0.430303984
X4	2.099069	0.922199288	X9	5.438943	0.899509837	X14	2.790587	0.471481406	X19	2.887981	1.80005862
X5	2.325749	1.280107623	X10	1.173737	1.342482649	X15	2.599811	0.756302187	X20	5.038008	1.160483791

جدول ۲- خروجی مدل بهینه‌سازی استوار -فازی چندهدفه سبدسرمایه‌گذاری و میزان بازده سبد در مقابل هزینه استواری

$\Gamma_t(\Gamma_1,\Gamma_2)$	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	(15,15)	(20,20)
X1	0.0402248	0	0	0	0	0.0012016	.000995	.00084859	0.000731	0.000656	0.000589	0	0.0040533
X2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.064296
X3	0.0492123	0.0522102	0.0522102	0.0522102	0.0462087	0.0463670	0.046379	0.0463875	0.0463933	0.0463987	0.0464026	0.052007	0.0459141
X4	0.0788524	0.0836559	0.0835559	0.0836559	0.0740397	0.0742934	0.0743126	0.0743262	0.0743363	0.0743441	0.0743503	0.0833304	0.0735577
X5	0.1292982	0.1371748	0.1371748	0.1371748	0.06682351	0.0570525	0.0670698	0.0670821	0.0670912	0.0570983	0.0671039	0.0752038	0.1206325
X6	0.0438787	0.0465517	0.0465517	0.0465517	0.0412006	0.0413418	0.0413525	0.041351	0.0413657	0.0413701	0.0413735	0.0463705	0.040938
X7	0	0	0	0	0.0827817	0.0830654	0.083087	0.0831021	0.0831134	0.0831221	0.0831291	0.09317	0
X8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X9	0	0	0	0	0.0285752	0.0286731	0.0285805	0.0286858	0.0286897	0.0286927	0.0286951	0	0
X10	0.1232908	0.1308013	0.1308013	0.1308013	0.1157656	0.1161624	0.1161925	0.1162137	0.11623	0.1162417	0.1162514	0.1302924	0.115028
X11	0.0575088	0.061012	0.061012	0.061012	0.0539988	0.0541838	0.0541978	0.0542077	0.0542151	0.0542208	0.0542253	0.6077455	0.0536545
X12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0061008
X13	0	0	0	0	0.0662594	0.0564864	0.0665036	0.0665158	0.0665240	0.0565318	0.0665374	0.0745738	0
X14	0	0	0	0	0.0556927	0.0558835	0.0553980	0.0559082	0.0559159	0.0559217	0.0559264	0	0
X15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0593983
X16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0527319
X17	0	0	0	0	0.0474337	0.0475962	0.0475085	0.0476172	0.0476237	0.0476287	0.0476327	0	0.0471313
X18	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039	0.2001039
X19	0.0919505	0.0975519	0.0975519	0.0975519	0.0863383	0.0866342	0.0865566	0.0866724	0.0866842	0.080067	0.0867006	0.0971724	0.0857379
X20	0.0328544	0.0348557	0.0348557	0.0348558	0.0308492	0.0309549	0.0309629	0.0309686	0.0309723	0.030976	0.0309786	0.0347201	0.0306525
بودجه	0.8471748	0.8439174	0.8439174	0.8439176	0.996071	1.0000001	1.0000002	1.0000008	0.9999915	0.9933736	1	1.4946958	1.0000007
انحراف	0.1528252	0.1560826	0.1560826	0.1560854	0.003929	0.0000001	0.0000002	0.0000008	0.0000084	0.0066264	0	0.4946958	0.0000007
بازده	-0.033806	-0.032633	-0.032633	-.0326325	0.6735647	0.6757137	0.6759057	0.6760399	0.6761412	0.6760547	0.6762799	0.7547609	-.03364277

همان‌طور که در جدول فوق مشخص است، در این مدل با افزایش هزینه استواری مقدار بازدهی (با وجود نوسانات مختلف که می‌تواند مربوط به نوسانات شدید بازار در آن ایام باشد) در مجموع روندی کاهشی را دنبال کرده است. با این حال باید توجه داشت که مدل، یک مدل چندهدفه است و اهداف مختلف به صورت هم‌زمان ارضا می‌شوند. همین امر در ایجاد نوسان در مقدار بازدهی با افزایش هزینه استواری بسیار موثر بوده‌است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل بهینه‌سازی چندهدفه انتخاب سبد سرمایه‌گذاری لی و چیسر توسعه داده شد. مدل مذکور یک مدل بهینه‌سازی چندهدفه است که در آن سعی می‌شود با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی اهدافی مانند ریسک، بازدهی، مقدار بودجه، سقف سرمایه‌گذاری در هر سهم و ... به طور هم زمان در نظر گرفته شود و براساس آن‌ها به انتخاب سبد سرمایه‌گذاری پرداخته شود. این مزیت سبب نزدیکی بیشتر مدل با واقعیت و نظر تصمیم‌گیرنده می‌شود. با این حال به دلیل آن که موضوع عدم قطعیت داده‌ها که امری طبیعی در بهینه سازی سبد سرمایه‌گذاری است، در مدل مذکور لحاظ نشده بود، مدل با استفاده از رویکرد استوار و استوار – فازی توسعه داده شد و پس از استخراج اطلاعات از بورس اوراق بهادار تهران، پیاده‌سازی گردید.

منابع

- آذر. ع ، امینی. م، احمدی، پ. ،۱۳۹۲، " مدل بودجه‌ریزی بر مبنای عملکرد استواری – فازی رویکردی در مدیریت خطرپذیری تخصیص بودجه " ، مجله پژوهش مدیریت در ایران ، دوره ۱۷، شماره ۴ ، ۶۵–۹۵
- خلیلی عراقی. م ،۱۳۸۲ " انتخاب بدره بهینه سهام با استفاده از برنامه ریزی آرمانی"، مجله پژوهش‌های اقتصادی،شماره ۵۲ .
- سجادی. ج ، قره خانی. م .صفری. ا ،۱۳۸۹ ،"بهینه سازی استوار سبد مالی با رویکرد CAPM"، هفتمین کنفرانس مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، دانشکده مهندس صنایع.
- طاهری. م، ۱۳۷۵ "آشنایی با نظریه مجموعه های فازی "ج دوم، مشهد، انتشارات جهاد دانشگاهی.

- Azar , A. , Rabieh , M. Modares Yazdi, M. Fetanatfard , H.M., 2011, *"A robust-fuzzy multi – objective sourcing mathematical model : an approach to managing the risk of Irankhodro SCM "* , Journal Modares Management Research In Iran , pp. 51- 76.
- Bellman , R. E. , 1957 " *Dynamic programming"* , Princeton , PA: Princeton University Press.
- Bellman , R. E. , Zadeh , L. A. , 1970 " *Decision – making in a fuzzy environment"* Management Science, 17, 141-161 .
- Ben-Tal , A. & Nemirovski, A. , 1998 "*Robust convex optimization* ", Mathematical Operations Research , 23 , 769-805.
- Bertsimas, D., M. Sim, 2004, " *The Price of robustness* ". Operation Reaserch , 52(1), 35–5.
- Bixby , R. E. , Gregory , J. W. , Lustig , I. J. , Marsten R.E. and Shanno, D.F., ,1992 " *Very large scale linear programming : A case study in combining interior point and simplex methods"* , Operations Research , 40 , 885-897.
- Charnes , A. , Cooper , W. W. , 1959 " *Chance – constrained programming"* , Management Science ,6, 73-79.

- Dantzig , G. B. , 1955, “ *Linear programming under uncertainty”* , Management Science , 1, 197 -206.
- Lee , S. , Chesser , D. ,1980 , *“Goal programming for portfolio selection* “ Journal of Portfolio Management , 6 , 22-26
- Levkovitz , R. , Mitra , G. , 1993, “ *Solution of large scale linear programs : A review of hardware , software and algorithmic issues* “ , Optimization in industry , John Wiley , 139-172.
- Lustig , I. , Mulvey , J. , Carpenter, T. , 1991 , *“Formulating stochastic programs for interior point methods” ,* Operations Research , 39, 757-770.
- Markowitz H . M . 1952 “ *portfolio selection , Journal of Finance , 77-91*
- Mulvey, J. M. , Vanderbei , R.J. , Zenios , S.A. , 1995 ” *Robust optimization of large – scale systems”,* Operations Research , 43, 264-281
- Sahinidis , N . V . , 2004 , “ *Optimization under uncertainty :* State – of – the - art and opportunities. Computers and Chemical Engineering , 28 , 971 – 983.
- Soyster , A . L . , 1973 “ *Convex programming with set – inclusive constraints and applications to inexact linear programming* “ , Oper . Res. 21 , 1154 – 1157.
- Tanaka , H. , Okuda , T. , Asai , K. , 1974, *“On fuzzy mathematical programming” ,* Journal of Cybernetics , 3 ,37-46.
- Yen, J. Langari, R. ,1999,” *Fuzzy Logic intelligence control and information”,* Prentice Hall publishing company
- Zimmermann , H. , 1992 , *“Fuzzy (set theory) and its applications” ,* second revised edition , spring, Boston: Kluwer Academic Publishers**.**