

بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی در شهرهای صنعتی

غلامحسین شیردل^{۱*}، محمد شیخ اکبری مهر^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۸/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۲۷

چکیده

بهینه‌سازی مصرف آب در حال حاضر یکی از مهمترین چالش‌های دولت‌ها در بسیاری از مناطق جهان به ویژه در مناطق خشک و نیمه خشک است. یکی از پارامترهای مهم در بخش آبرسانی، شبکه توزیع آب می باشد که طراحی بهینه این شبکه‌های آبرسانی می‌تواند تأثیر بسزایی در کاهش هزینه‌ها و نیز استفاده حداکثری از منابع آب را دربر داشته باشد. به همین منظور در این مقاله، مدل‌های برنامه‌ریزی چندگانه برای یکپارچه سازی مصرف آب در شهرهای صنعتی و سیستم‌های ماکروسکوپیک پیشنهاد شده است. هر دو مدل ریاضی پیشنهادی، مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی توأم با اعداد صحیح می‌باشند که مدل پیشنهادی A با هدف کمینه سازی مصرف آب شیرین در شهرهای صنعتی از طریق بهینه‌سازی استفاده مجدد از آب به طور مستقیم و نیز طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی با کمترین هزینه جهت استفاده مجدد از آب به طور مستقیم است و مدل پیشنهادی B با هدف برنامه‌ریزی ذخیره‌سازی و توزیع بهینه آب در یک سیستم ماکروسکوپیک ارائه می شود. در پایان نیز، مثال‌هایی جهت اثبات مزایای مدل‌های پیشنهادی آورده شده است که نتایج بدست آمده از نقطه نظرات اقتصادی، ذخیره‌سازی و پایداری منابع آب، پتانسیل عظیم مدل‌های پیشنهادی را نشان می دهد.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی مصرف آب، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی، بهینه‌سازی چند دوره‌ای، آبرسانی یکپارچه، ذخیره‌سازی و توزیع بهینه آب در شهرهای صنعتی

shirdel81math@gmail.com
akbarimehr1990@gmail.com

۱. دانشیار، گروه ریاضی دانشگاه قم
۲. کارشناسی ارشد، ریاضی کاربردی دانشگاه قم

۱- مقدمه

کمبود آب یکی از نگرانی‌های اصلی بسیاری از کشورهای جهان است. امروزه به سبب افزایش جمعیت، کمبود منابع آبی، توسعه شهرنشینی و صنعت، کاهش بارندگی و رقابت برای مصرف آب، به کارگیری مناسب و استفاده بهینه و حداکثری از آب لازم و ضروری می‌باشد. به همین منظور، روش‌های گوناگونی جهت کاهش مصرف آب و جبران کمبود آب به کار گرفته شده است که می‌توان به استحصال آب باران و تصفیه و بازسازی فاضلاب اشاره کرد. اما هر کدام از این روش‌ها به دلایلی مانند کاهش ریزش‌های جوی و هزینه‌های بسیار تصفیه خیلی مؤثر و کارا نمی‌باشند. بنابراین باید به دنبال راهکارهای دیگری باشیم. یکی از این راهکارهای مؤثر استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی ریاضی می‌باشد که در سال‌های اخیر نظر بسیاری از محققان را جهت طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی اعم از کشاورزی، شهری و صنعتی را به خود معطوف کرده است. با توجه به این که شبکه‌های آبرسانی وسعت بالا و همچنین پیچیدگی‌های خاص خود را دارند لذا هزینه‌های هنگفتی را به خود اختصاص می‌دهند، بنابراین طراحی بهینه این شبکه‌ها می‌تواند تأثیر بسزایی در کاهش هزینه‌ها و نیز بهینه‌سازی مصرف آب به دنبال داشته باشد. از طرفی مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی می‌توانند موقعیت‌ها و سیستم‌های خیلی پیچیده را به سادگی با روابط ریاضی بیان نمایند و نیز دستکاری مدل بسیار ساده‌تر از دستکاری کردن سیستم واقعی است و لذا هزینه آزمایش و خطا در مدل‌ها بسیار کمتر از هزینه آزمایش و خطا در سیستم واقعی است. در همین راستا، محققان زیادی با بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی توانسته‌اند مدل‌های پیشنهادی بسیاری را در جهت طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی در شهرهای صنعتی ارائه دهند که می‌توان به چاکرابورتی و کولبرگ (۲۰۰۲) و (۲۰۰۳)، گابریل و الحلواجی (۲۰۰۵)، چن و همکاران (۲۰۰۸)، چاکرابورتی (۲۰۰۹)، وانگ و همکاران (۲۰۱۲)، بویکس و همکاران (۲۰۱۲) و لی همکاران (۲۰۱۳) اشاره کرد.

علاوه بر مدل‌های برنامه‌ریزی قطعی (خطی، غیرخطی، پویا و اعداد صحیح) که در فوق به آنها اشاره شد، محققان بسیاری از روش‌های بهینه‌سازی تصادفی مانند الگوریتم ژنتیک

استفاده کرده‌اند که در این زمینه نیز می‌توان به آثاری چون لاواریچ و همکاران (۲۰۰۵)، پراکوتیل و سرینوفاکان (۲۰۰۴)، شفیعی و همکاران (۲۰۰۴)، جزوفسکی و همکاران (۲۰۰۳)، آویزو و همکاران (۲۰۱۰)، هال و همکاران (۲۰۰۷) و تان و همکاران (۲۰۰۸) اشاره کرد. شایان ذکر است که تمام آثاری که به آنها اشاره شد فقط بر یکپارچگی آب با فرض بدون تغییر ماندن واحدهای صنعتی، تصفیه‌خانه‌ها و شهرهای صنعتی در طول زمان تمرکز کرده‌اند در حالی که می‌دانیم ظرفیت واحدهای صنعتی و تصفیه‌خانه‌ها در طول زمان در حال تغییر است. به همین منظور مدل برنامه‌ریزی چند دوره‌ای برای طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی نیاز می‌شود. بنابراین در این مقاله، دو مدل برنامه‌ریزی چند دوره‌ای جهت طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی به منظور مصرف بهینه آب بررسی و مطالعه می‌شود.

۲- مدل پیشنهادی A

مسئله اصلی مشخص شده در این مدل نگاشت بین منابع آب و سینک‌های موجود در یک شهر صنعتی در مدت زمان برنامه‌ریزی از طریق استفاده مجدد از آب به طور مستقیم می‌باشد. هدف اصلی این مدل تعیین تخصیص مؤثر از استفاده مجدد از آب و همچنین طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی کارا از نظر اقتصادی است. معلومات مسئله در این مدل عبارتند از: (۱) یک شهر صنعتی شامل تعدادی واحد صنعتی (۲) یک نوع آلاینده در سرتاسر شهر صنعتی (۳) تعدادی جریان فاضلاب (منابع) و ترکیب آن در هر واحد صنعتی (۴) یک نوع عملیات استفاده از آب (سینک‌ها) به همراه مقدار جریان مورد نیاز و محدودیت‌ها در آب آلوده شده با آلاینده‌ها (۵) وجود ارتباط بین منابع و سینک‌ها و محدودیت‌های مقدار جریان متناظر (۶) تعداد دوره‌های زمانی (۷) تعمیمی در جدول زمان‌بندی جزئیات جهت افزایش واحدهای صنعتی جدید و منابع و سینک‌های اختصاص یافته و تغییر در واحدهای صنعتی موجود از منابع و سینک‌های موجود در هر دوره زمانی (۸) طول کوتاهترین اتصالات بین تمام منابع و سینک‌ها در شهر صنعتی (۹) محدودیت‌های جغرافیایی معلوم که تعداد لوله‌ها را در دوره زمانی مفروضی محدود می‌کند. همچنین در این مدل تعیین می‌شود: (۱) تخصیص آب بین

منابع و سینک‌ها و مقادیر جریان آب متناظر در طول کل برنامه‌ریزی برای به حداکثر رساندن استفاده مجدد مستقیم از آب و کمینه‌سازی آب شیرین مورد نیاز (۲) هزینه بهینه شبکه آبرسانی مجدد آب که منابع و سینک‌ها را در یک شهر صنعتی به هم وصل می‌کند به انضمام سیر تکاملی آن در طول دوره‌های زمانی. تعدادی از مجموعه‌ها که در این مدل ریاضی استفاده شده اند عبارتند از:

$I = \{i = 1, 2, \dots, N_{sources} | \text{منابع می‌فرآیند باشد}\}$

$J = \{j = 1, 2, \dots, N_{sinks} | \text{سینک می‌فرآیندهای باشد}\}$

$T = \{t = 1, 2, \dots, N_{times} | \text{دوره می‌زمانی‌های باشد}\}$

$P = \{p = 1, 2, \dots, N_{plants} | \text{مجموعه ای از واحدهای می‌صنعتی باشد}\}$

$B = \{b = 1, 2, \dots, N_{contaminants} | \text{مجموعه ای از آلاینده می‌ها باشد}\}$

هر منبع می‌تواند به چند جریان تقسیم شود: (۱) جریان از منبع به سینک $F_{i(p_1),j(p_2),t}$ که جریان را از i آمین منبع واحد صنعتی p_1 به j آمین سینک واحد صنعتی p_2 در دوره زمانی t ($p_1, p_2 \in P$) را نشان می‌دهد و (۲) جریان از منبع به فاضلاب $F_{i(p_1),ww,t}$ که جریان را از هر منبع واحد صنعتی p_1 به تخلیه زیست محیطی نشان می‌دهد.

منابع آب شیرین با عنوان $F_{j(p_2),t}$ به سینک‌های مختلف اختصاص پیدا می‌کنند. یک محدودیت در تعداد اتصالات بین منابع و سینک‌ها توسط متغیر دوتایی $X_{i(p_1),j(p_2),t}$ اتفاق می‌افتد که اتصال بین i آمین منبع واحد صنعتی p_1 و j آمین سینک واحد صنعتی p_2 را نشان می‌دهد. X برابر با یک فرض می‌شود اگر مقدار جریان اختصاص یافته به جریان خاصی غیر صفر و بیشتر از حداقل مقدار مورد نیاز مفروض باشد. گفتنی است که لوله‌ها مهمترین هزینه‌های سرمایه هستند که در دوره‌های زمانی بعدی باقی خواهند ماند.

دو مسئله بهینه‌سازی چند دوره‌ای برای استفاده مجدد آب به طور مستقیم در شهرهای صنعتی فرمول‌بندی می‌شود: (۱) یک مدل با هدف استفاده مجدد از آب به طور مستقیم که به کمینه‌سازی مقدار آب در طول برنامه‌ریزی نیاز است (۲) یک مدل برای تعیین هزینه بهینه

طراحی شبکه آبرسانی استفاده مجدد از آب به طور مستقیم و سیر تکاملی آن در طول برنامه‌ریزی.

فرمول بهینه‌سازی ایجاد شده با هدف کاهش مصرف آب شیرین مورد استفاده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} \sum_{j \in J} w_t F_{fw,j(p),t} \quad (1)$$

که w_t وزن اختصاص یافته به دوره زمانی t می‌باشد و $F_{fw,j(p),t}$ مقدار جریان آب شیرین به j آمین سینک از واحد صنعتی p در طول دوره زمانی t است. وزن‌ها توسط کاربر در راستای مطالعه موردی مشخص می‌شوند. ضوابط برای تعیین تنظیمات وزن‌ها ممکن است شامل ارتباط تقاضای خالص آب در یک دوره مفروض بر حداکثر تقاضا باشد. تابع هدف منوط به تعدادی محدودیت کمینه‌سازی می‌شود که این محدودیت‌ها عبارتند از:

الف) محدودیت‌های تعادل جرم منبع و سینک:

$$F_{i(p_1),ww,t} + \sum_{j \in J} F_{i(p_1),j(p_2),t} = F_{i(p_1),t} ; \forall i \in I , p_1, p_2 \in P \quad (2)$$

$$F_{fw,j(p_2),t} + \sum_{i \in I} F_{i(p_1),j(p_2),t} = F_{j(p_2),t} ; \forall j \in J , p_1, p_2 \in P \quad (3)$$

منابع آب می‌توانند به محیط زیست تخلیه شوند ($F_{i(p_1),ww,t}$) یا به یک سینک ارسال شوند ($F_{i(p_1),j(p_2),t}$). در اینجا، p_1 و p_2 می‌توانند یک واحد صنعتی یا دو واحد صنعتی مجزا باشند. علاوه بر این، سینک‌ها می‌توانند آب را با آلاینده‌گی زیاد از منابع ($F_{i(p_1),j(p_2),t}$) و یا آب شیرین ($F_{fw,j(p_2),t}$) دریافت کنند. محدودیت زیر تضمین می‌کند که سطوح آلاینده‌گی آب مورد استفاده در سینک‌ها از حداکثر سطوح آلاینده‌گی قابل قبول تجاوز نکند:

$$F_{fw,j(p_2),t} C_{b,fw,t} + \sum_{i \in I} F_{i(p_1),j(p_2),t} C_{b,i(p_1),t} \leq F_{j(p_2),t} C_{b,j(p_2),t}$$

$$; \forall j \in J, p_1, p_2 \in P \quad (4)$$

که $C_{b,fw,t}$ غلظت آلاینده b در آب شیرین می‌باشد، $C_{b,i(p_1),t}$ غلظت آلاینده b در منبع i از واحد صنعتی p_1 در دوره زمانی t است و $C_{b,j(p_2),t}$ غلظت آلاینده b در سینک j از واحد صنعتی p_2 در دوره زمانی t می‌باشد. معادله (۵) قرار می‌دهد محدودیتی را بر تعداد لوله کشی هایی که می‌تواند بین منابع و سینک‌ها ایجاد شود:

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} X_{i(p_1),j(p_2),t} \leq N_t \quad (5)$$

که $X_{i(p_1),j(p_2),t}$ به وجود جریان بین منبع i از واحد صنعتی p_1 و سینک j از واحد صنعتی p_2 در دوره زمانی t اشاره می‌کند. اتصالات داخلی با مقادیر جریان $(F_{i(p_1),j(p_2),t})$ کمتر از یک حداقل آستانه (ε) می‌تواند با دلایل اقتصادی نادیده گرفته شود. این محدودیت توسط شرایط اگر-آنگاه زیر مشخص می‌شود:

$$\text{if } F_{i(p_1),j(p_2),t} \leq \varepsilon \quad \text{then } X_{i(p_1),j(p_2),t} = 0 \quad (6a)$$

$$\text{if } \varepsilon \leq F_{i(p_1),j(p_2),t} \leq U \quad \text{then } X_{i(p_1),j(p_2),t} = 1 \quad (6a)$$

که U کران بالایی از مقدار جریان قابل قبول $F_{i(p_1),j(p_2),t}$ می‌باشد. شرایط اگر-آنگاه در معادلات (۶a) و (۶b) می‌توانند با کمک معادله زیر به کار گرفته شوند:

$$\varepsilon X_{i(p_1),j(p_2),t} \leq F_{i(p_1),j(p_2),t} \leq U X_{i(p_1),j(p_2),t} \quad (7)$$

براساس این معادله، اگر $\varepsilon < F_{i(p_1),j(p_2),t}$ آنگاه $F_{i(p_1),j(p_2),t}$ و $X_{i(p_1),j(p_2),t}$ برابر با صفر می‌باشند تا محدودیت برقرار باشد و اگر $F_{i(p_1),j(p_2),t}$ بین ε و U واقع شود آنگاه $X_{i(p_1),j(p_2),t}$ برابر با یک است. هر اتصال در دوره زمانی t با معادله زیر به دوره زمانی بعدی برده می‌شود:

$$\begin{aligned} X_{i(p_1),j(p_2),t+1} - X_{i(p_1),j(p_2),t} \\ \geq X_{i(p_1),j(p_2),t} - 1 \end{aligned} \quad (8a)$$

یک فرمول تناوبی دیگر برای کنترل نیازها به اتصال در دوره‌های بعدی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X_{i(p_1),j(p_2),t} = X_{i(p_1),j(p_2),t+1} ; \{t \mid X_{i(p_1),j(p_2),t} = 1\} \quad (8b)$$

این معادله تضمین می‌کند که اگر یک اتصال در دوره قبلی نیاز شود ($X_{i(p_1),j(p_2),t-1} = 1$) و در دوره جاری نیاز شود، مقدار تمام X ها در دوره‌های بعدی برابر با یک قرار داده می‌شود.

در نهایت، تمام جریان‌ات باید نامنفی باشند:

$$F_{fw,j(p_2),t} \geq 0 \quad (9)$$

$$F_{i(p_1),j(p_2),t} \geq 0 \quad (10)$$

$$F_{i(p_1),ww,t} \geq 0 \quad (11)$$

معادلات (۱) تا (۱۱) فرمول بهینه‌سازی با هدف کاهش مصرف آب شیرین را تشکیل می‌دهند. حال فرمول بهینه‌سازی با هدف کمینه‌سازی هزینه کل مورد استفاده در طراحی بهینه شبکه‌های آبرسانی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \sum_{t \in T} \sum_{p_1, p_2 \in P} w_t [\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a (DI_{i(p_1),j(p_2)}^c)^b d_{i,j} + \sum_{j \in J} a (DI_{fw,j(p_2)}^c)^b d_{fw,j} \\ + \sum_{i \in I} a (DI_{i(p_1),ww}^c)^b d_{i,ww} + H_Y C^{fresh} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} F_{fw,j(p_2),t}] \quad (12) \end{aligned}$$

که w_t وزن اختصاص یافته به دوره زمانی t می‌باشد، d فاصله بین دو وسیله است، $DI_{i(p_1),j(p_2)}^c$ قطر لوله بین منبع i از واحد صنعتی p_1 و سینک j از واحد صنعتی p_2 می‌باشد، $DI_{i(p_1),ww}^c$ قطر لوله بین منبع آب شیرین و سینک j از واحد صنعتی p_2 است،

قطر لوله بین منبع i از واحد صنعتی p_1 و تخلیه فاضلاب می باشد، $F_{fw,j(p_2),t}$ مقدار جریان بین منبع آب شیرین و سینک j از واحد صنعتی p_2 در دوره زمانی t است و H_T به ساعت عملیات در یک دوره زمانی اشاره می کند، C^{fresh} هزینه آب شیرین برای هر تُن می باشد و a و b پارامترهای هزینه هستند. هزینه سرمایه تابعی از قطر لوله های اتصالات داخلی می باشد که در ابتدا براساس مقدار جریان از طریق اتصال داخلی محاسبه می شوند. تعداد اتصالات به حداکثر تعداد قابل قبول محدود می شوند تا به کاربر کنترل اجازه بدهند طراحی های ساده را همانطور که مناسب است، حفظ کند. معادله (۱۳) یک محدودیت را برای تعداد لوله های اتصال برقرار می کند که می تواند بین منابع و سینک ها ایجاد شود:

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} X_{i(p_1),j(p_2),t} \leq N_t \quad (13)$$

معادله (۱۴) یک محدودیت برای حداقل مقدار جریان مورد نیاز برقرار می کند که یک اتصال را مجبور می کند تا از اتصالات به جریانات بسیار کوچک و لذا قطرها اجتناب کند:

$$\begin{aligned} \varepsilon X_{i(p_1),j(p_2),t} &\leq F_{i(p_1),j(p_2),t} \\ &\leq U X_{i(p_1),j(p_2),t} \end{aligned} \quad (14)$$

که U یک عدد بسیار بزرگ می باشد و ε حداقل مقدار جریان مورد نیاز است. هر اتصال ایجاد شده در دوره زمانی t با معادله زیر به دوره زمانی بعدی نیز انتقال می یابد:

$$\begin{aligned} X_{i(p_1),j(p_2),t+1} - X_{i(p_1),j(p_2),t} \\ \geq X_{i(p_1),j(p_2),t} - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

در نهایت، محدودیت های نامنفی که مربوط به تمام جریانات شبکه می باشند به صورت زیر بیان می شوند:

$$F_{fw,j(p_2),t} \geq 0 \quad (16)$$

$$F_{i(p_1),j(p_2),t} \geq 0 \quad (17)$$

$$F_{i(p_1),ww,t} \geq 0 \quad (18)$$

اندازه لوله نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$DI = 0.363(M^{0.45} \cdot \rho^{0.13}) \quad (19)$$

که M شدت مقدار جریان (m^3/s) می‌باشد و ρ چگالی جریان است.

۳- مدل پیشنهادی B

مدل پیشنهادی در این بخش یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی توأم با اعداد صحیح است که مؤلفه‌های اصلی آن منابع طبیعی آب (سدها، چشمه‌های آب و چاه‌های عمیق) و مصرف کنندگان (صنعتی، کشاورزی و شهری) و منابع دیگر آب (استحصال آب باران و آب تصفیه شده) می‌باشند. منابع طبیعی می‌توانند از طریق بارش مستقیم، روان آب و شاخه‌های رودهای طبیعی شارژ شوند. مسئله اصلی در این مدل یافتن برنامه‌ریزی بهینه برای مدیریت منابع در یک سیستم ماکروسکوپی جهت حفظ سطوح پایدار منابع طبیعی است و نیز بیشینه‌سازی درآمد از فروش آب منهای هزینه‌های سرمایه و عملیات توزیع و ذخیره‌سازی می‌باشد. همچنین جواب‌های بدست آمده، موقعیت بهینه و زمان نصب مخازن و آبنگيرهای مصنوعی را تعیین خواهند کرد. از آنجایی که مدل پیشنهادی یک مسئله زمان‌بندی چند ساله می‌باشد، نرخ رشد جمعیت و رابطه آن با تقاضای آب، ارزش پول در طول زمان و تغییر در الگوی بارش به سبب تغییرات آب و هوایی در یک مسیر قطعی فرض خواهد شد و می‌تواند براساس اطلاعات تاریخی پیش‌بینی شود.

برای درک بهتر از مدل ریاضی پیشنهادی ابتدا حروف مورد استفاده در مدل را معرفی می‌کنیم: K نشانگر منابع طبیعی، m تعداد انشعابات که منابع طبیعی را شارژ می‌کنند، t زمان دوره می‌باشد، l و n نشانگر مکان ممکن برای مخازن آب و آبنگيرهای مصنوعی (که مستقل

از مصرف کنندگان صنعتی، خانگی و کشاورزی می‌باشد)، سرانجام، z نشانگر سینک‌های خانگی، h نشانگر سینک‌های کشاورزی و u نشانگر سینک‌های صنعتی هستند.

۳. ۱. تعادل جرم برای منابع آب طبیعی

این تعادل نشان می‌دهد که انباشتگی وابسته به موجودی ابتدایی منابع طبیعی $(r_{m,k,t})$ و ورودی‌ها و خروجی‌ها در طول آن دوره زمانی می‌باشد. در معادله (۲۰)، عبارت $r_{m,k,t}$ ورودی‌ها از انشعابات به جریان K می‌باشد در حالی که $P_{k,t}^g$ ورودی‌ها از بارش مستقیم و روان آب جمع‌آوری شده است. خروجی‌ها آب ارسال شده به خطوط اصلی مختلف هستند: خانگی $(g_{k,t}^d)$ ، کشاورزی $(g_{k,t}^a)$ و صنعتی $(g_{k,t}^i)$.

$$G_{k,t} - G_{k,t-1} = \sum_{m \in M} r_{m,k,t} + P_{k,t}^g - g_{k,t}^d - g_{k,t}^a - g_{k,t}^i - v_{k,t}^g - \text{Drop}_{k,t}^g$$

; $\forall k \in K, \forall t \in T$ (20)

که $G_{k,t}$ آب موجود در منابع طبیعی K در دوره زمانی t می‌باشد و $G_{k,t-1}$ آب موجود در منابع طبیعی K در دوره زمانی $t-1$ است، $v_{k,t}^g$ آب از دست رفته در منابع طبیعی در طول دوره زمانی t می‌باشد و $\text{Drop}_{k,t}^g$ آبی است که از حداکثر ظرفیت منابع طبیعی K در طول دوره زمانی t تجاوز می‌کند.

عبارت $P_{k,t}^g$ می‌تواند به صورت مجموع روان آب جمع‌آوری شده و بارش مستقیم محاسبه شود:

$$P_{k,t}^g = \text{ROWV}_{k,t} + \text{DPWV}_{k,t} ; \quad k \in K, \quad t \in T \quad (21)$$

که $\text{ROWV}_{k,t}$ روان آب جمع‌آوری شده در منابع طبیعی K در طول دوره زمانی t می‌باشد و $\text{DPWV}_{k,t}$ آب جمع‌آوری شده از بارش مستقیم در منابع طبیعی K در طول دوره

زمانی t است. $ROWV_{k,t}$ تابعی از ضریب جریان، کل بارش سالیانه و سطح جمع‌آوری می‌باشد:

$$ROWV_{k,t} = P_t \cdot A_k^{ROW} \cdot Ce \quad ; \quad k \in K, \quad t \in T \quad (22)$$

که P_t بارش در طول دوره زمانی t می‌باشد، A_k^{ROW} سطح جمع‌آوری برای منابع طبیعی K است و Ce ضریب جریان می‌باشد.

در اینجا، Ce می‌تواند بارش‌های مستقیم به عنوان تابعی از بارش سالیانه و پارامتر K بدست آورده شود که پارامتر K نوع و کاربری زمین را در نظر می‌گیرد.

$$Ce = \frac{K (P^{total} - 250)}{2000} \quad ; \quad K \leq 0.15 \quad (23)$$

که P^{total} بارش سالیانه است و K پارامتری برای نوع و کاربری زمین است.

$$Ce = \frac{K (P^{total} - 250)}{2000} + \frac{K - 0.15}{1.5} \quad ; \quad K > 0.15 \quad (24)$$

بارش مستقیم می‌تواند به عنوان تابعی از سطح جمع‌آوری و بارش ماهیانه محاسبه شود:

$$DPWV_{k,t} = P_t \cdot A_k^{DPW} \quad ; \quad k \in K, \quad t \in T \quad (25)$$

در نهایت، عبارت $Drop_{k,t}^g$ و $v_{k,t}^g$ آب از دست رفته (به واسطه تبخیر، فیلتراسیون و از دست رفتن در فرآیند توزیع که در اینجا حدود ۲۰٪ از آب جمع‌آوری شده در نظر گرفته می‌شود) و آب مازاد (مقدار آبی که از حداکثر ظرفیت منبع K تجاوز می‌کند) می‌باشند:

$$v_{k,t}^g = 0.2 \left(\sum_{m \in M} r_{m,k,t} + P_{k,t}^g \right) \quad ; \quad k \in K, \quad t \in T \quad (26)$$

۳-۲- تعادل جرم برای بارش در مخازن آب مصنوعی

ظرفیت استحصال آب باران برای وسایل مصنوعی وابسته به سطح بارندگی در یک مکان خاص و فصل سال، سطح جمع آوری در دسترس و ضریب جریان می باشد که به طور تابعی می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$P = f(\text{Area}, Ce, \text{Precipitation}) \quad (27)$$

اطلاعات بارش می تواند به سادگی از ایستگاه های هواشناسی بازیابی شود. ضریب جریان که برابر است با ارتفاع آب جریان یافته در زمین به ارتفاع بارندگی در بازه ۰,۷-۰,۹۵ متغیر است. در نهایت، سطح جمع آوری، سطح بام در دسترس وسایل ذخیره سازی در نظر گرفته می شود. دو نوع مختلف وسیله ذخیره سازی در نظر گرفته می شود: مخازن آب و آبگیرهای مصنوعی. برای هر وسیله یک متغیر مقدار آب در دسترس را برای جمع آوری مجدد در صورت نیاز تعیین می کند که به صورت زیر بیان می شود:

$$P_{l,t}^s = P_t \cdot A_l^s \cdot Ce^s \quad ; \quad l \in L, \quad t \in T \quad (28)$$

که $P_{l,t}^s$ مقدار کل آب در دسترس برای مخازن آب l در دوره زمانی t می باشد، A_l^s سطح جمع آوری برای مخازن آب l است و Ce^s ضریب جریان برای مخزن آب s می باشد. یک معادله مشابه برای هر آبگیر مصنوعی n با جایگذاری $P_{n,t}^a$ به جای $P_{l,t}^s$ و A_n^a به جای A_l^s در نظر گرفته می شود که $P_{n,t}^a$ مقدار کل آب در دسترس برای آبگیرهای مصنوعی n در دوره زمانی t می باشد و A_n^a سطح جمع آوری در دسترس برای آبگیرهای مصنوعی n در دوره زمانی t است. حال آب باران جمع آوری شده مؤثر و کارا به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_{l,t}^s = s_{l,t}^{in} + v_{l,t}^s \quad (29)$$

براساس این معادلات، بارش کل در دسترس برای هر دوره زمانی t می تواند به مخازن آب ($s_{l,t}^{in}$) ارسال شود. اگر ظرفیت مخازن وجود نداشته باشد آنگاه آب مازاد می تواند نادیده

گرفته شود. برای آبگیرهای مصنوعی نیز یک معادله مشابه با جایگذاری $P_{n,t}^a$ به جای $P_{l,t}^s$ ، $a_{n,t}^{in}$ به جای $s_{l,t}^{in}$ و $v_{n,t}^a$ به جای $v_{l,t}^s$ به کار گرفته می‌شود.

۳-۳- تعادل جرم در مخازن آب و آبگیرهای مصنوعی

مشابه منابع طبیعی، یک معادله تعادل جرم برای مخازن آب نیاز می‌شود. انباشتگی در سرتاسر دوره زمانی t ($s_{l,t}$) برابر است با آب ذخیره شده در دوره زمانی قبلی ($s_{l,t-1}$) به اضافه آب ورودی منهای مجموع خروجی‌ها. در این مورد تنها ورودی به مخازن آب، آب باران استحصال شده ($s_{l,t}^{in}$) می‌باشد در حالی که خروجی‌ها، آب ارسال شده به مصرف‌کنندگان خانگی ($s_{l,j,t}^{out,d}$)، کشاورزی ($s_{l,h,t}^{out,a}$) و صنعتی ($s_{l,u,t}^{out,i}$) هستند. وجود و ظرفیت این مخازن به عنوان بخشی از فرآیند بهینه‌سازی تعیین می‌شود:

$$s_{l,t} - s_{l,t-1} = s_{l,t}^{in} - \sum_{j \in J} s_{l,j,t}^{out,d} - \sum_{h \in H} s_{l,h,t}^{out,a} - \sum_{u \in U} s_{l,u,t}^{out,i} \quad ; \forall l \in L, \forall t \in T \quad (30)$$

تعادل جرم‌ها برای آبگیرهای مصنوعی n مشابه معادله (۳۰) می‌باشد فقط نیاز است که n با l ، $s_{l,t}$ با $A_{n,t}$ ، $s_{l,t-1}$ با $A_{n,t-1}$ ، $s_{l,t}^{in}$ با $a_{n,t}^{in}$ ، $s_{l,j,t}^{out,d}$ با $a_{n,j,t}^{out,d}$ ، $s_{l,h,t}^{out,a}$ با $a_{n,h,t}^{out,a}$ و $s_{l,u,t}^{out,i}$ با $a_{n,u,t}^{out,i}$ جایگذاری شود که در اینجا، $A_{n,t}$ آب ذخیره شده در کل دوره زمانی t می‌باشد، $A_{n,t-1}$ آب ذخیره شده در دوره زمانی قبلی است، $a_{n,t}^{in}$ آب باران استحصال شده می‌باشد، $a_{n,j,t}^{out,d}$ آب مصرف شده توسط مصرف‌کنندگان خانگی است، $a_{n,h,t}^{out,a}$ آب مصرف شده توسط مصرف‌کنندگان کشاورزی می‌باشد و $a_{n,u,t}^{out,i}$ آب مصرف شده توسط مصرف‌کنندگان صنعتی است.

۳-۴- تعادل جرم در خطوط اصلی

منابع آب طبیعی به خطوط اصلی مختلف (خانگی، کشاورزی و صنعتی) ارسال می‌شوند. برای مثال در خط اصلی مصرف کنندگان خانگی، جمع منابع آب طبیعی ($g_{k,t}^d$) ارسال شده به خط اصلی برابرند با مجموع آب ارسالی از خط اصلی خانگی به سینک‌های خانگی ($f_{j,t}$).

$$\sum_{k \in K} g_{k,t}^d = \sum_{j \in J} f_{j,t} \quad ; \quad t \in T \quad (31)$$

معادلات مشابه برای خطوط اصلی کشاورزی (با جایگذاری $g_{k,t}^a$ به جای $g_{k,t}^d$ و $r_{h,t}$ به جای $f_{j,t}$) و خطوط اصلی صنعتی (با جایگذاری $g_{k,t}^i$ به جای $g_{k,t}^d$ و $q_{u,t}$ به جای $f_{j,t}$) به کار گرفته می‌شوند. در اینجا، $f_{j,t}$ مقدار جریان جدا شده برای ارسال از خط اصلی خانگی به مصرف کنندگان خانگی J در طول دوره زمانی t می‌باشد، $r_{h,t}$ مقدار جریان جدا شده برای ارسال از خط اصلی کشاورزی به مصرف کنندگان کشاورزی h در طول دوره زمانی t است و $q_{u,t}$ مقدار جریان جدا شده برای ارسال از خط اصلی صنعتی به مصرف کنندگان صنعتی u در طول دوره زمانی t می‌باشد.

۳-۵- تعادل برای سینک‌ها و تصفیه‌خانه‌ها

برای مصرف کنندگان کشاورزی، تقاضاها ($D_{h,t}^{as}$) می‌تواند با جریاناتی از خط اصلی کشاورزی ($r_{h,t}$)، مخازن آب ($s_{l,h,t}^{out,a}$)، آبگیرهای مصنوعی ($a_{n,h,t}^{out,a}$)، آب اصلاح شده از تصفیه خانگی ($int_{h,t}^{out,ag}$) و آب اصلاح شده از تصفیه خانه صنعتی ($int_{h,t}^{out,i}$) به صورت زیر واقع شود:

$$D_{h,t}^{as} \leq r_{h,t} + \sum_{l \in L} s_{l,h,t}^{out,a} + \sum_{n \in N} a_{n,h,t}^{out,a} + int_{h,t}^{out,ag} + int_{h,t}^{out,i} ; h \in H, t \in T \quad (32)$$

فرض می‌شود که کل جریان دریافتی در سینک‌های کشاورزی در فرآیند تولید مصرف شود.

تقاضاهای خانگی ($D_{j,t}^{as}$) می‌تواند با آب مورد استفاده از خط اصلی خانگی ($f_{j,t}$), آب مورد استفاده از مخازن آب ($s_{l,j,t}^{out,d}$) یا آب مورد استفاده از آبگیرهای مصنوعی ($a_{n,j,t}^{out,d}$) واقع شود. تقاضا در هر سینک تابعی از جمعیت و فصل سال (تقاضا در ماه‌های گرم سال افزایش می‌یابد و در ماه‌های سرد سال کاهش می‌یابد) می‌باشد. تعادل برای سینک‌های خانگی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_{j,t}^{ds} \leq f_{j,t} + \sum_{l \in L} s_{l,j,t}^{out,d} + \sum_{n \in N} a_{n,j,t}^{out,d} ; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (33)$$

مشابه روابط فوق می‌تواند برای تقاضاهای صنعتی به کار گرفته شود فقط نیاز است که u به جای j , $D_{u,t}^{di}$ به جای $D_{j,t}^{ds}$, $q_{u,t}$ به جای $f_{j,t}$, $s_{l,u,t}^{out,i}$ به جای $s_{l,j,t}^{out,d}$ و $a_{n,u,t}^{out,i}$ به جای $a_{n,j,t}^{out,d}$ جایگذاری شود.

جریان خروجی از سینک‌های خانگی به دو عبارت تقسیم می‌شوند، عبارت اول ($cw_{j,t}^d$) برای آب مصرف شده یا آب از دست رفته در سینک‌های خانگی محاسبه می‌شود و عبارت دوم ($int_{j,t}^{in}$) فاضلاب بازیافت شده را در سینک‌های خانگی نشان می‌دهد. این آب می‌تواند به یک تصفیه‌خانه ارسال شود تا دوباره بازیافت و در سینک‌های کشاورزی (int_t^{out}) استفاده شود یا برای مصرف نهایی (cw_t^{tp}) ارسال شود.

$$D_{j,t}^{ds} = cw_{j,t}^d + int_{j,t}^{in} ; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (34)$$

$$\sum_j int_{j,t}^{in} = int_t^{out} + cw_t^{tp} \quad (35)$$

آب تصفیه شده می‌تواند به هر سینک کشاورزی به صورت زیر ارسال شود:

$$int_t^{out} = \sum_h int_{h,t}^{out,ag} ; \quad t \in T \quad (36)$$

که در اینجا، $int_{h,t}^{out,ag}$ آب اصلاح شده و ارسالی به سینک‌های کشاورزی h در طول دوره زمانی t می‌باشد.

برای تصفیه و توزیع فاضلاب بازیافت شده در سینک‌های صنعتی، معادلات (۳۴) تا (۳۶) با جایگذاری u به جای j ، $D_{u,t}^{di}$ به جای $D_{j,t}^{ds}$ ، $cw_{u,t}^{di}$ به جای $cw_{j,t}^d$ ، $int_{u,t}^{in}$ به جای $int_{j,t}^{in}$ ، $int_{t,t}^{out}$ به جای int_t^{tpi} ، cw_t^{tpi} به جای cw_t^{tp} و $int_{h,t}^{out,i}$ به جای $int_{h,t}^{out,ag}$ به کار گرفته می‌شود.

۳-۶- معادلات برای نصب مخازن آب یا آبگیرهای مصنوعی

معادله زیر محدودیت حداکثر ظرفیت وسایل ذخیره‌سازی مختلف را بیان می‌کند:

$$S_l^{max} \geq S_{l,t} \quad ; \quad l \in L, \quad t \in T \quad (37)$$

مشابه محدودیت فوق برای آبگیرهای مصنوعی (با استفاده از A_n^{max}) بیان می‌شود.

وجود یا عدم وجود مخازن آب با معادلات زیر مدل‌بندی می‌شود: اگر در هر دوره زمانی نیاز شود آنگاه متغیر دوتایی $z_{l,t}^s$ برابر است با یک و مخزن آب در مکان l در دوره زمانی t نصب می‌شود، در غیر این صورت متغیر دوتایی برابر با صفر می‌باشد و مخزن نصب نمی‌شود، بنابراین هزینه اختصاص یافته به نصب این مخزن صفر خواهد بود. دلیل مشابهی برای آبگیرهای مصنوعی ($z_{n,t}^a$) استفاده می‌شود. ظرفیت وسایل ذخیره‌سازی باید بین ظرفیت بالاتر و ظرفیت پایین‌تر وسایل واقع شود. $\delta_l^{s,max}$ و $\delta_l^{s,min}$ حداکثر و حداقل ظرفیت هستند و حدود $\delta_n^{a,max}$ و $\delta_n^{a,min}$ نیز برای آبگیرهای مصنوعی می‌باشند. در اینجا، توابع هزینه به مکان مخازن آب و آبگیرهای مصنوعی مربوط می‌شوند و نیز A و B ثابت‌های مورد استفاده برای تعیین هزینه‌های ثابت و متغیر مخازن آب هستند و C و D ثابت‌های اختصاص یافته برای هزینه‌های متغیر و ثابت آبگیرهای مصنوعی می‌باشند. $Cost_{l,t}^s$ هزینه مخازن آب می‌باشند و $Cost_{n,t}^a$ نیز هزینه آبگیرهای ساختگی است. α توان مثبتی است که کمتر از ۰ و ۱ می‌باشد و مقیاس اقتصادی را در نظر می‌گیرد. علاوه بر این، عامل K_F برای سرمایه سالیانه محاسبه می‌شود و تأثیر تورم را بر هزینه‌های سرمایه و ارزش پول در طول زمان را در نظر می‌گیرد. VP ارزش خالص سرمایه می‌باشد که ارزش پول را در طول زمان برای

هر وسیله ذخیره‌سازی ارزیابی می‌کند. اینها به صورت زیر برای مخازن آب مدل بندی می‌شوند:

$$\sum_t z_{l,t}^s \leq 1 \quad ; \quad \forall l \in L \quad (38)$$

$$S_{l,t'} \leq \delta_l^{s,max} \sum_{t=1}^{t=t'} z_{l,t}^s \quad ; \quad \forall l \in L, t' \in T', \forall t' \leq T' \quad (39)$$

$$S_{l,t'}^{in} \leq \delta_l^{s,max} \sum_{t=1}^{t=t'} z_{l,t}^s \quad ; \quad \forall l \in L, t' \in T', \forall t' \leq T' \quad (40)$$

$$K_{F_l}^s = \sum_t K_{F_{l,t}} \cdot VP_{l,t} \cdot z_{l,t}^s \quad ; \quad \forall l \in L \quad (41)$$

$$S_l^{cap} \geq S_{l,t} \quad ; \quad l \in L, \quad t \in T \quad (42)$$

$$Cost_{l,t}^s = K_{F_l}^s [A + B((S_l^{cap})^\alpha)] \quad ; \quad \forall l \in L \quad (43)$$

روابط مشابه برای آبگیرهای مصنوعی با جایگذاری n با l و $z_{n,t}^a$ به جای $z_{l,t}^s$ ، $A_{n,t'}$ به جای $S_{l,t'}$ ، $\delta_n^{a,max}$ به جای $\delta_l^{s,max}$ ، $a_{n,t}^{in}$ به جای $s_{l,t}^{in}$ ، $K_{F_n}^a$ به جای $K_{F_l}^s$ ، $K_{F_{n,t}}$ به جای $K_{F_{l,t}}$ ، $VP_{n,t}$ به جای $VP_{l,t}$ ، $Cost_{n,t}^a$ به جای $Cost_{l,t}^s$ ، C به جای A و D به جای B به کار گرفته می‌شود.

۳-۷- تابع هدف

تابع هدف شامل بیشینه‌سازی سود خالص از فروش آب مورد استفاده در شهر می‌باشد. تابع هدف پیشنهادی فروش آب را برای اهداف خانگی، کشاورزی و صنعتی (Contribution) منهای هزینه‌های اختصاص یافته به تصفیه (Treatment Cost) و توزیع آب (pp Cost) و نیز هزینه‌های اختصاص یافته به نصب و عملیات مخازن مصنوعی (Storage Cost) در نظر می‌گیرد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$TAR = Contribution - Treatment Cost - Storage Cos - pp Cost \quad (44)$$

قیمت فروش آب به منبع آن بستگی ندارد و فقط به مصرف نهایی بستگی دارد چنانکه در آمد می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} Contribution = & (\sum_k \sum_t g_{k,t}^d + \sum_l \sum_j \sum_t s_{l,j,t}^{out,d} + \sum_n \sum_j \sum_t a_{n,j,t}^{out,d}) DSC + \\ & (\sum_k \sum_t g_{k,t}^a + \sum_l \sum_h \sum_t s_{l,h,t}^{out,a} + \sum_t int_t^{out}) ASC + \\ & (\sum_k \sum_t g_{k,t}^i + \sum_l \sum_u \sum_t s_{l,u,t}^{out,i} + \sum_n \sum_u \sum_t a_{n,u,t}^{out,i} + \\ & \sum_h \sum_t int_t^{out,i}) ISC \end{aligned} \quad (45)$$

که در اینجا، DSC قیمت آب برای مصرف خانگی می باشد، ASC قیمت آب برای اهداف کشاورزی است و ISC قیمت آب برای مصارف صنعتی می باشد. منابع مختلف، کیفیت های متفاوت دارند و نیز نیاز مصرف کننده مشخصات متفاوتی دارد. بنابراین، بسته به منبع و استفاده، هزینه تصفیه می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{aligned} Treatment Cost = & (\sum_k \sum_t g_{k,t}^d CTND + \sum_k \sum_t g_{k,t}^a CTNA + \\ & \sum_k \sum_t g_{k,t}^i CTNI) + (\sum_l \sum_j \sum_t s_{l,j,t}^{out,a} + \sum_n \sum_j \sum_t a_{n,j,t}^{out,d}) CTAD + \\ & (\sum_l \sum_h \sum_t s_{l,h,t}^{out,a} + \sum_n \sum_j \sum_t a_{n,j,t}^{out,a}) CTAA + (\sum_b \sum_u \sum_t s_{b,u,t}^{out,i} + \\ & \sum_w \sum_u \sum_t a_{w,u,t}^{out,i}) CTAI + (\sum_l \sum_u \sum_t s_{l,u,t}^{out,i} + \sum_n \sum_u \sum_t a_{n,u,t}^{out,i}) ISC + \\ & (\sum_t int_t^{out} + \sum_h \sum_t int_t^{out,i}) CTPA + (\sum_t cw_t^{tp} + \\ & \sum_t cw_t^{tpi}) CTPE \end{aligned} \quad (46)$$

که در اینجا، CTND هزینه تصفیه برای جریان های طبیعی جهت مصرف خانگی می باشد، CTNA هزینه تصفیه برای جریان های طبیعی جهت مصرف کشاورزی است، CTNI هزینه تصفیه برای جریان های طبیعی جهت مصرف صنعتی می باشد، CTAD و CTAA به ترتیب هزینه های تصفیه آب باران برای اهداف خانگی و کشاورزی هستند، همچنین CTAI هزینه

تصفیه آب باران برای مصرف صنعتی می‌باشد، CTP هزینه تصفیه برای بازسازی فاضلاب جهت مصرف کشاورزی است و CTPE هزینه تصفیه فاضلاب برای تخلیه در محیط زیست می‌باشد.

هزینه ذخیره‌سازی از مجموع هزینه سالیانه مخازن مصنوعی (به ترتیب $Cost_{l,t}^s$ و $Cost_{n,t}^a$ برای مخازن و آبگیرها) بدست آورده می‌شود:

$$Storage\ Cost = \left(\sum_l \sum_t Cost_{l,t}^s + \sum_n \sum_t Cost_{n,t}^a \right) \quad (47)$$

هزینه لوله‌کشی و پمپاژ (pp Cost) اختصاص یافته به انتقال آب از یک مکان به مکان دیگر با پارامترهای زیر ارائه می‌شود: PCSTD هزینه واحد انتقال از مخزن آب l به سینک خانگی j می‌باشد، PCASD هزینه واحد پمپاژ از آبگیرهای مصنوعی n به سینک خانگی j است، PCSTA هزینه واحد لوله‌کشی و پمپاژ از مخزن آب l به سینک کشاورزی h می‌باشد، PCASA هزینه واحد لوله‌کشی و پمپاژ از آبگیرهای مصنوعی n به سینک کشاورزی h است، PCSTI هزینه واحد لوله‌کشی و پمپاژ از مخزن آب l به سینک صنعتی u می‌باشد، PCASI هزینه واحد لوله‌کشی و پمپاژ از آبگیرهای مصنوعی n به سینک صنعتی u است، PCND، PCNA و PCNI به ترتیب هزینه‌های واحد لوله‌کشی و پمپاژ از منابع طبیعی K به خطوط اصلی خانگی، کشاورزی و صنعتی می‌باشند و سرانجام PCTW (خانگی) و PCTI (صنعتی) هزینه‌های واحد لوله‌کشی و پمپاژ از تصفیه‌خانه‌ها به سینک‌های کشاورزی h هستند. بنابراین، هزینه کل لوله‌کشی و پمپاژ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned}
 pp \text{ Cost} &= \sum_l \sum_j \sum_t s_{l,j,t}^{out,d} PCSTD + \sum_n \sum_j \sum_t a_{n,j,t}^{out,d} PCASD \\
 &+ \sum_l \sum_h \sum_t s_{l,h,t}^{out,a} PCSTA + \sum_n \sum_h \sum_t a_{n,h,t}^{out,a} PCASA \\
 &+ \sum_l \sum_u \sum_t s_{l,u,t}^{out,a} PCSTI + \sum_n \sum_u \sum_t a_{n,h,t}^{out,i} PCASI \\
 &+ \sum_k \sum_t g_{k,t}^d PCNI + \sum_k \sum_t g_{k,t}^a PCNA + \sum_k \sum_t g_{k,t}^i PCNI \\
 &+ \sum_h \sum_t int_{h,t}^{out,ag} PCTW + \sum_h \sum_t int_{h,t}^{out,i} PCTI \quad (48)
 \end{aligned}$$

۴- بحث و تجزیه و تحلیل

حال به منظور اثبات مزایا و فواید مدل‌های پیشنهادی، در این بخش مطالعات موردی و مثال‌هایی ارائه می‌شود و نتایج حاصل از این مثال‌ها نیز نمایش داده می‌شود.

۴-۱- مطالعه موردی برای مدل پیشنهادی A

در این مطالعه موردی نتایج بدست آمده از روش بهینه‌سازی تک دوره‌ای و روش بهینه‌سازی چند دوره‌ای (مدل پیشنهادی A) با هم مقایسه می‌شوند. در این مثال، مقادیر d ، b و p به ترتیب ۳۱۱۴٫۸۶، ۱٫۰۵۳۲ و 1000 kg/m^3 در نظر گرفته شده‌اند. H_V برابر با $h/yaer$ ۸۷۶۰ می‌باشد و هزینه آب شیرین یعنی C^{fresh} برابر با $\$/ton$ ۰٫۱۳ است. کران پایین برای مقدار جریان (E) نیز 2 tons/h در نظر گرفته می‌شود. همچنین این مثال، برنامه‌ریزی یک وضعیت صنعتی را برای پنج دوره زمانی از هر دو سال را در نظر می‌گیرد. وضعیت ابتدایی شامل دو منبع و دو سینک است. این تعداد به چهار منبع و چهار سینک در دوره زمانی دوم افزایش می‌یابد در حالی که مقادیر جریان و غلظت، همان دوره زمانی قبل باقی

می‌مانند. در دوره زمانی سوم، تعداد منابع و سینک‌ها شش عدد می‌شود با مقادیر جریان بیشتر، در حالی که اطلاعات غلظت اختصاص یافته به چهار وسیله قبلی ثابت می‌ماند. در دوره زمانی چهارم، ظرفیت منابع و سینک‌ها گسترش می‌یابد اما غلظت آلاینده‌ها همان باقی می‌ماند. در دوره زمانی پنجم، مقدار جریان از دوره زمانی چهارم حفظ می‌شود اما غلظت آلاینده‌ها تغییر می‌کند، سه نوع آلاینده مختلف فرض می‌شود که در جریان‌ها مشاهده می‌شود. اطلاعات ورودی مقادیر جریان و غلظت برای این مثال در جداول (۱) تا (۳) ارائه می‌شود. مقدار کل آب شیرین مورد نیاز در برنامه‌ریزی چند دوره‌ای 1089 tons/h می‌باشد و تعداد اتصالات مورد نیاز ۲۷ اتصال است. نتایج برای بهینه‌سازی چند دوره‌ای در جدول (۴) تهیه شده است. جدول (۵) نتایج این مثال را برای بهینه‌سازی تک دوره‌ای در کمینه‌سازی احتیاجات به آب شیرین ارائه می‌دهد. برای برنامه‌ریزی تک دوره‌ای، مقدار جریان مورد نیاز 1089 tons/h با ۳۳ لوله اتصال می‌باشد. بنابراین همانطور که انتظار می‌رود، آب مورد نیاز در هر دو مورد یکسان است اما تعداد اتصالات مورد نیاز در بهینه‌سازی چند دوره‌ای کمتر است. جدول (۶) مقادیر جریان از دوره‌های ۱ تا ۵ را ارائه می‌دهد و جدول (۷) هزینه سرمایه را نشان می‌دهد. جدول‌های (۸) و (۹) مقادیر جریان و اطلاعات هزینه را برای این مثال از بهینه‌سازی تک دوره‌ای برای کمینه‌سازی هزینه کل شبکه را ارائه می‌دهند. هزینه سرمایه شبکه بدست آمده با استفاده از بهینه‌سازی چند دوره‌ای $10.63 \times 10^7 \$$ و هزینه کل آب شیرین مورد نیاز در تمام دوره‌ها $0.24 \times 10^7 \$$ شده است. زمانی که دوره‌ها به طور مجزا حل می‌شوند در این صورت هزینه سرمایه $12.91 \times 10^7 \$$ و هزینه آب شیرین $0.26 \times 10^7 \$$ محاسبه شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده، هزینه کل محاسبه شده با استفاده از برنامه‌ریزی چند دوره‌ای ۱۷,۶۸٪ کمتر از هزینه کل بدست آمده با استفاده از برنامه‌ریزی تک دوره‌ای شده است. در مجموع ۲۶ اتصال در برنامه‌ریزی چند دوره‌ای نیاز شده است در حالی که ۳۶ اتصال برای برنامه‌ریزی تک دوره‌ای نیاز شده است.

جدول ۱- اطلاعات مقدار جریان و غلظت برای منابع

منبع	مقدار جریان (tons/h)	C1 (ppm)	C2 (ppm)	C3 (ppm)
		دوره زمانی ۱		
P2S2	۱۲۰	۱۰۰	۵۰	۳۰
P2S1	۸۰	۱۴۰	۱۰۰	۶۰
دوره زمانی ۲				
P2S2	۱۲۰	۱۰۰	۵۰	۳۰
P2S1	۸۰	۱۴۰	۱۰۰	۶۰
P3S1	۱۴۰	۱۸۰	۱۵۰	۱۳۰
P6S2	۸۰	۲۳۰	۱۸۰	۱۸۰
دوره زمانی ۳				
P2S2	۱۲۰	۱۰۰	۵۰	۳۰
P2S1	۸۰	۱۴۰	۱۰۰	۶۰
P3S1	۱۴۰	۱۸۰	۱۵۰	۱۳۰
P6S2	۸۰	۲۳۰	۱۸۰	۱۸۰
P6S1	۱۹۵	۲۵۰	۱۹۰	۲۰۰
P4S1	۱۰۰	۱۰۰	۱۹۰	۲۱۰
دوره زمانی ۴				
P2S2	۲۰۰	۱۰۰	۵۰	۳۰
P2S1	۱۰۰	۱۴۰	۱۰۰	۶۰
P3S1	۱۳۵	۱۸۰	۱۵۰	۱۳۰
P6S2	۱۹۰	۲۳۰	۱۸۰	۱۸۰
P6S1	۱۹۵	۲۵۰	۱۹۰	۲۰۰
P4S1	۱۲۰	۱۰۰	۱۹۰	۲۱۰
دوره زمانی ۵				
P2S2	۲۰۰	۱۰۰	۵۰	۳۰
P2S1	۱۰۰	۱۶۰	۱۲۰	۶۰
P3S1	۱۳۵	۱۸۰	۱۵۰	۱۶۰
P6S2	۱۹۰	۲۱۰	۲۱۰	۱۸۰
P6S1	۱۹۵	۲۷۰	۱۹۰	۲۱۰
P4S1	۱۲۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۱۰

جدول ۲- اطلاعات مقدار جریان و آلاینده‌گی برای سینک‌ها

منبع	مقدار جریان (tons/h)	C1 (ppm)	C2 (ppm)	C3 (ppm)
		دوره زمانی ۱		
P2D1	۱۲۰	۴۰	۶۰	۳۰
P1D2	۸۰	۵۰	۵۰	۸۰
		دوره زمانی ۲		
P1D1	۱۲۰	۴۰	۶۰	۳۰
P1D2	۸۰	۵۰	۵۰	۸۰
P3D1	۸۰	۵۰	۷۰	۱۰۰
P5D1	۱۴۰	۱۴۰	۱۰۰	۱۰۰
		دوره زمانی ۳		
P1D1	۱۲۰	۴۰	۶۰	۳۰
P1D2	۸۰	۵۰	۵۰	۸۰
P3D1	۸۰	۵۰	۷۰	۱۰۰
P5D1	۱۴۰	۱۴۰	۱۰۰	۱۰۰
P5D2	۸۰	۱۷۰	۱۲۰	۱۳۰
P4D1	۱۹۵	۲۴۰	۱۳۰	۱۵۰
		دوره زمانی ۴		
P1D1	۱۲۰	۴۰	۶۰	۳۰
P1D2	۲۰۰	۵۰	۵۰	۸۰
P3D1	۱۳۵	۵۰	۷۰	۱۰۰
P5D1	۱۹۰	۱۴۰	۱۰۰	۱۰۰
P5D2	۱۰۰	۱۷۰	۱۲۰	۱۳۰
P4D1	۱۹۵	۲۴۰	۱۳۰	۱۵۰
		دوره زمانی ۵		
P1D1	۱۲۰	۴۰	۶۰	۳۰
P1D2	۲۰۰	۵۰	۵۰	۸۰
P3D1	۱۳۵	۵۰	۸۵	۱۲۰
P5D1	۱۹۰	۱۴۰	۱۰۰	۱۰۰
P5D2	۱۰۰	۱۶۰	۱۲۰	۱۴۰
P4D1	۱۹۵	۲۴۰	۱۴۵	۱۵۰

جدول ۳- ترتیب و آرایش شهر صنعتی (مسافت، km)

سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۵,۴	۵	۸	۱۰	۱۱,۶	۴	۲,۶
P2S1	۳,۶	۳,۲	۶,۲	۸,۲	۹,۸	۵	۳,۶
P3S1	۹,۶	۴	۴,۲	۷,۸	۹,۴	۱۰,۲	۹,۲
P6S2	۸,۲	۷	۴,۸	۵,۶	۷,۲	۴,۴	۷,۴
P6S1	۸	۶,۸	۳,۸	۴,۶	۶,۲	۴,۶	۷,۶
P4S1	۱۲,۶	۱۱,۴	۹,۶	۱۰,۴	۱۱,۲	۵,۶	۸,۶
آب شیرین	۱۱,۶	۱۰,۴	۸,۶	۷,۴	۷,۴	۴,۶	۷,۶

جدول ۴- نتایج مقدار جریان بهینه‌سازی چند دوره‌ای آب شیرین

دوره زمانی ۱					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	فاضلاب (WW)		
P2S2	۴۳,۷۱	۳۹,۱۸	۳۷,۱		
P2S1	۲	۰	۷۸		
آب شیرین	۷۴,۲۸	۴۰,۸۲			
دوره زمانی ۲					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D 1	P5D 1	فاضلاب (WW)
P2S2	۱۰,۸۲	۳۹,۱۸	۰	۷۰	۰
P2S1	۲۵,۳۶	۰	۲۷,۸۳	۰	۲۶,۸۱
P3S1	۰	۰	۰	۷۰	۷۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۸۰
آب شیرین	۸۳,۸۲	۴۰,۸۲	۵۲,۱۷	۰	۸۰
دوره زمانی ۳					

سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۲	۲۶,۰۶	۰	۵۷,۳۶	۳۴,۶۱	۰	۰
P2S1	۲۷,۵۳	۰	۱۲,۳۸	۰	۰	۴۰	۰
P3S1	۰	۰	۰	۷۳,۹۲	۱۸,۳۶	۴۷,۷۱	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۲	۷۸	۰
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۵,۷۶	۱۳,۱۲	۲۱,۷۵	۰	۲۵	۰	۳۴,۳۴
آب شیرین	۸۴,۷۰	۴۰,۸۲	۴۵,۸۷	۸,۷۲	۰	۲۹,۲۲	۰
دوره زمانی ۴							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۲	۵۶,۱۶	۰	۹۵	۳۷,۹	۰	۰
P2S1	۲۷,۵۳	۰	۲۰,۸۹	۰	۰	۵۱,۵۳	۰
P3S1	۰	۰	۰	۹۵	۳۶,۴	۳,۶	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۲۳,۷۳	۱۰۸,۳۴	۵۷,۹۳
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۵,۷۶	۳۲,۷۹	۳۶,۷	۰	۲	۰	۴۲,۷۸
آب شیرین	۸۴,۷۰	۱۰۲	۷۷,۴	۰	۰	۳۱,۵۴	۰
دوره زمانی ۵							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۲	۶۵,۱۶	۰	۹۵	۳۸	۰	۰
P2S1	۲۷,۵۳	۰	۱۸,۵۸	۰	۰	۵۳,۷۶	۰
P3S1	۰	۰	۰	۹۵	۳۶	۴	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۲۴	۱۰۷,۶۳	۵۸,۳۶
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۵,۷۶	۳۲,۸	۳۹,۹۶	۰	۲	۰	۳۹,۵
آب شیرین	۸۴,۷۵	۱۰۲	۷۶,۴۶	۰	۰	۲۹,۶	۰

جدول ۵- نتایج مقدار جریان بهینه‌سازی تک دوره‌ای آب شیرین

دوره زمانی ۱						
سینک‌ها (j)						
منبع (i)	P1D1	P1D2	فاضلاب (WW)			
P2S2	۴۶,۵۳	۳۶,۳۷	۳۷,۱			
P2S1	۰	۲	۷۸			
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۱,۶۳				
دوره زمانی ۲						
سینک‌ها (j)						
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	فاضلاب (WW)	
P2S2	۴۶,۵۳	۰	۰	۷۳,۴۷	۰	
P2S1	۰	۲۷,۸۲	۲۷,۸۳	۰	۲۴,۳۵	
P3S1	۰	۰	۰	۶۶,۵۳	۷۳,۴۷	
P6S2	۰	۰	۰	۰	۸۰	
آب شیرین	۷۳,۴۷	۵۲,۱۸	۵۲,۱۷	۰		
دوره زمانی ۳						
سینک‌ها (j)						
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۲۳,۱	۱۴,۶۳	۵۰,۵۹	۷,۲۶	۲۴,۴
P2S1	۲۹,۰۹	۰	۰	۰	۵۰,۹۲	۰
P3S1	۰	۰	۰	۰	۰	۱۴۰
P6S2	۰	۰	۰	۶۳	۰	۱۷
P6S1	۰	۰	۰	۰	۲۱,۴۸	۱۷۳,۱۹
P4S1	۵,۵۸	۱۳,۴۸	۲۴,۵۴	۰	۰	۵۶,۰۳
آب شیرین	۸۵,۳۳	۴۳,۰۶	۴۰,۸۲	۲۶,۴۲	۰	۱۳,۵۸
دوره زمانی ۴						
سینک‌ها (j)						
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۰	۰	۸۵,۶۲	۳۹,۳۸	۷۵
P2S1	۲۹,۰۸	۵۵,۱۲	۰	۱۵,۸	۰	۰
P3S1	۰	۰	۱۸,۱	۸۷,۵۶	۲۹,۳۴	۰

۳۸,۷۲	۱۲۰	۳۱,۲۸	۰	۰	۰	۰	P6S2
۱۹۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	P6S1
۶۰,۸۳	۰	۰	۰	۳۳,۲۵	۲۰,۳۵	۵,۵۸	P4S1
	۰	۰	۱	۸۳,۶۵	۱۲۴,۵۴	۸۵,۳۴	آب شیرین
دوره زمانی ۵							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۵۹,۳۲	۰	۹۵	۰	۴۵,۶۸	۰
P2S1	۲۹,۰۸	۵	۰	۰	۶۵,۹۸	۰	۰
P3S1	۰	۰	۱۵,۹۶	۹۵	۲۴,۰۴	۰	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۱۰	۱۲۸,۱۵	۵۱,۸۸
P6S1	۵,۵۸	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۸۵,۳۴	۳۱,۶۸	۳۷,۱۴	۰	۰	۰	۴۵,۵۹
آب شیرین	۰	۱۰۴	۸۱,۹	۰	۰	۲۱,۱۷	

جدول ۶- نتایج مقدار جریان بهینه‌سازی چند دوره‌ای هزینه

دوره زمانی ۱					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	فاضلاب (WW)		
P2S2	۴۶,۵۳	۳۹,۱۸	۳۴,۲۹		
P2S1	۰	۰	۸۰		
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۰,۸۲			
دوره زمانی ۲					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۴۶,۵۳	۳۹,۱۸	۰	۲	۳۲,۲۹
P2S1	۰	۰	۰	0	۸۰
P3S1	۰	۰	۲۱,۵۷	۲	۱۱۶,۴۸
P6S2	۰	۰	۰	۰	۸۰
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۰,۸۲	۵۸,۴۲	۱۳۶	

دوره زمانی ۳							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۳۷,۵۵	۲۶,۰۶	۰	۹,۷۳	۰	۴۶,۶۵	۰
P2S1	۰	۰	۰	۰	۳۱,۲۳	۴۸,۷۶	۰
P3S1	۰	۰	۱۰,۷۳	۸۸,۷	۴۰,۵۷	۰	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۲	۷۸	۰
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۲۱,۵۸	۱۷۳,۴۲
P4S1	۸,۹۸	۱۳,۱۱	۱۹,۷	۰	۰	۰	۵۸,۲
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۰,۸۲	۴۹,۵۷	۴۱,۵۶	۶,۱۹	۰	۰
دوره زمانی ۴							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۳۷,۵۵	۶۵,۱۶	۰	۸۲,۴۴	۰	۱۴,۸۴	۰
P2S1	۰	۰	۰	۰	۲	۹۸	۰
P3S1	۰	۰	۱۸,۱	۹۸,۸۹	۱۸	۰	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۴۹,۷۱	۸۰,۱۵	۶۰,۱۳
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۱۹۳
P4S1	۸,۹۸	۳۲,۸	۳۳,۲۵	۰	۰	۰	۴۴,۹۷
آب شیرین	۷۳,۴۷	۱۰۲,۰۴	۸۳,۶۵	۸,۶۶	۳۰,۲۸	۰	۰
دوره زمانی ۵							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D1	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۳۷,۵۵	۶۵,۱۶	۰	۹۵	۰	۲,۲۸	۰
P2S1	۰	۰	۱۵,۹۵	۰	۶۵,۹۸	۳۴	۰
P3S1	۰	۰	۰	۹۵	۲۴	۰	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۹,۹۷	۱۱۹,۱۹	۶۰,۱۳
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۱۹۳
P4S1	۸,۹۸	۳۲,۸	۳۷,۱۴	۰	۰	۰	۴۱,۰۸
آب شیرین	۷۳,۴۷	۱۰۲,۰۴	۸۱,۹	۰	۰	۳۷,۵	۰

جدول ۷- چارت هزینه برای بهینه‌سازی چند دوره‌ای ($\times 10^7$ \$)

سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰,۳۱	۰,۲۸	۰	۰,۵۷	۰	۰,۲۳	۰,۱۵
P2S1	۰,۲۱	۰	۰	۰	۰,۵۶	۰,۲۹	۰,۲
P3S1	۰	۰	۰,۱۲	۰,۴۵	۰,۵۴	۰	۰,۵۳
P6S2	۰	۰	۰	۰	۰,۴۱	۰,۲۵	۰,۴۲
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰,۱۳	۰,۶۶
P4S1	۰,۳۵	۰,۶۳	۰,۵۵	۰	۰	۰	۰,۴۹
آب شیرین	۰,۶۶	۰,۵۹	۰,۴۹	۰,۶۵	۰,۴۲	۰	۰

جدول ۸- نتایج مقدار جریان بهینه‌سازی تک دوره‌ای هزینه

دوره زمانی ۱					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	فاضلاب (WW)		
P2S2	۴۶,۵۳	۳۹,۱۸	۳۴,۲۹		
P2S1	۰	۰	۸۰		
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۰,۸۲			
دوره زمانی ۲					
سینک‌ها (j)					
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	فاضلاب (WW)
P2S2	۴۶,۵۳	۳۹,۱۸	۰	۰	۳۴,۲۹
P2S1	۰	۰	۰	۳۲,۶۹	۴۴,۳۳
P3S1	۰	۰	۰	۵۹,۰۶	۸۰,۹۴
P6S2	۰	۰		۰	۸۰
آب شیرین	۷۳,۴۷	۴۰,۸۲	۸۰	۴۸,۲۷	

دوره زمانی ۳							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۲۴,۰۵	۱۴,۶۳	۰	۳۲,۸۲	۴۸,۴۹	۰
P2S1	۲۹,۰۸	۰	۰	۵۰,۹۲	۰	۰	۰
P3S1	۰	۰	۰	۰	۲۵,۱۴	۱۱۴,۸۶	۰
P6S2	۰	۰	۰	۴۸,۳۶	۰	۳۱,۶۴	۰
P6S1	۰	۰	۰	۰	۲۲,۰۴	۰	۱۷۲,۹۵
P4S1	۵,۵۸	۱۳,۶۱	۲۴,۵۵	۰	۰	۰	۵۶,۲۵
آب شیرین	۸۵,۳۴	۴۲,۳۳	۴۰,۸۱	۴۰,۷۲	۰	۰	۰
دوره زمانی ۴							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۰	۰	۸۵,۴۴	۴۲,۲۵	۷۲,۳	۰
P2S1	۲۹,۰۸	38.93	۱۲,۸۷	۱۹,۱۱	۰	۰	۰
P3S1	۰	۱۴,۰۲	۶,۹۴	۸۵,۴۴	۱۶,۹	۱۱,۶۸	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۴۰,۸۴	۱۱۱,۰۱	۳۸,۱۴
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۵,۵۸	۱۷,۶۶	۳۵,۳۸	۰	۰	۰	۶۱,۳۷
آب شیرین	۸۵,۳۴	۱۲۹,۳۸	۷۹,۸	۰	۰	۰	۰
دوره زمانی ۵							
سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰	۴۶,۰۹	۰	۹۵	۵,۲۵	۵۳,۶۵	۰
P2S1	۲۹,۰۸	۱۲,۱۹	۰	۰	۵۸,۷۳	۰	۰
P3S1	۰	۳,۴	۱۵,۹۶	۹۵	۲۰,۶۴	۰	۰
P6S2	۰	۰	۰	۰	۱۵,۳۸	۱۲۵,۹۳	۴۸,۶۸
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۹۵
P4S1	۵,۵۸	۲۸,۵	۳۷,۱۴	۰	۰	۰	۴۸,۷۷
آب شیرین	۸۵,۳۴	۱۰۹,۸	۸۱,۹	۰	۰	۱۵,۴۲	۰

جدول ۹- چارت هزینه برای بهینه‌سازی تک دوره‌ای ($\times 10^6$ \$)

سینک‌ها (j)							
منبع (i)	P1D1	P1D2	P3D1	P5D5	P5D2	P4D1	فاضلاب (WW)
P2S2	۰,۳۱	۰,۲۸	۰,۲۲	۰,۵۷	۰,۶۶	۰,۲۳	۰,۱۵
P2S1	۰,۲۱	۰,۱۸	۰	۰,۴۷	۰,۵۶	۰	۰,۲
P3S1	۰	۰,۱۱	۰,۱۲	۰,۴۵	۰,۵۴	۰,۵۸	۰,۵۳
P6S2	۰	۰	۰	۰,۳۲	۰,۴۱	۰,۲۵	۰,۴۲
P6S1	۰	۰	۰	۰	۰,۱۷	۰	۰,۶۶
P4S1	۰,۳۵	۰,۶۳	۰,۵۳	۰	۰	۰	۰,۴۹
آب شیرین	۰,۶۶	۰,۵۹	۰,۴۹	۰,۴۲	۰	۰,۱۳	

برای مدل پیشنهادی A مطالعه موردی دیگری جهت اثبات مزایای مدل پیشنهادی صورت گرفته است که این مطالعه موردی براساس دو مطالعه موردی شامل شرکت منسوجات مالزی (Malaysian Textile Company) و یک خمیر حرارتی (thermomechanical pulp) و آسیاب کاغذ روزنامه (newsprint mill) می‌باشد. مطالعه موردی اصلی Malaysian Textile Company شامل دو منبع و سینک است. برنامه‌ریزی برای ۱۰ سال انجام می‌شود که به پنج دوره زمانی ۲ ساله تقسیم شده است. وضعیت ابتدایی شامل فقط یک بخش سفیدگری با دو منبع و سینک و با یک نوع آلایندگی می‌باشد. ظرفیت این وضعیت برای سه دوره زمانی در تمام دوره‌ها افزایش می‌یابد در حالی سطوح غلظت آلایندگی یکسان می‌باشد. در چهارمین دوره زمانی خمیر حرارتی و آسیاب کاغذ روزنامه به کار گرفته می‌شوند و در نتیجه نوع دیگری از آلایندگی به سیستم اضافه می‌شود. ظرفیت این سیستم تا دوره زمانی پنجم افزایش می‌یابد. این مطالعه موردی نیز در دو حالت بهینه‌سازی چند دوره‌ای و بهینه‌سازی تک دوره‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد که نتایج بدست آمده در هر دو حالت نیز قابل مقایسه است. هزینه سرمایه شبکه بدست آمده با استفاده از بهینه‌سازی چند دوره‌ای 21.33×10^7 \$ می‌باشد و هزینه کل آب شیرین مورد نیاز در داخل دوره زمانی پنجم 2.92×10^7 \$ محاسبه می‌شود. زمانی که دوره‌های زمانی

به صورت جداگانه حل می شود هزینه سرمایه شبکه به 34.03×10^7 \$ افزایش می یابد و هزینه آب شیرین 2.92×10^7 \$ محاسبه می شود. با مقایسه نتایج مشاهده می کنیم که هزینه کل محاسبه شده توسط بهینه سازی چند دوره ای ۳۵٪ ارزان تر از هزینه کل بدست آمده توسط بهینه سازی تک دوره ای است اما هزینه آب شیرین در هر دو مورد تقریباً یکسان است. تعداد کل اتصالات مورد نیاز برای بهینه سازی چند دوره ای ۱۵ اتصال و برای بهینه سازی تک دوره ای ۳۰ اتصال می باشد. برای مطالعه بیشتر می توانید به (بیشنو و همکاران ۲۰۱۴) مراجعه کنید.

گفتنی است از آنجایی که کشور ایران نیز جز کشورهای صنعتی می باشد و دارای شهرک های صنعتی بسیاری است بنابراین پیشنهاد می شود با به کارگیری مدل های پیشنهادی تا حدود زیادی در هزینه و مصرف آب صرفه جویی نمود. به عنوان کارهای آینده می توان مدل های پیشنهادی را بر روی شهرک صنعتی شکوهیه قم با وسعت ۹۵۵ هکتاری در ۱۲ کیلومتری محور قدیم قم-تهران اجرا نمود که از موقعیت مناسبی برای ایجاد واحدهای صنعتی برخوردار می باشد و امکانات زیربنایی مورد نیاز همچون شبکه های توزیع آب و فاضلاب در تمامی سطح شهرک پوشش داده شده است.

مدل پیشنهادی A فقط باز یافت و استفاده مجدد از آب را به عنوان گزینه ای برای یکپارچه سازی آب در نظر می گیرد بنابراین بهینه سازی چند دوره ای می تواند به طور مشخص با نگاه بیشتری به سناریوهای تصفیه گسترش پیدا کند. همچنین مؤلفه های بیشتری از هزینه از قبیل هزینه های عملیات نیز می تواند در این روش مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. از این رو، کارهای آینده می تواند به بررسی تأثیر وجود وسایل تصفیه بر روی هزینه و تعداد اتصالات شبکه در بهینه سازی چند دوره ای متمرکز شوند. همچنین صرف نظر از داشتن وسایل تصفیه، سینک های مصرف کننده آب بیشتری از قبیل آبیاری و تقاضاهای انتقال آب در کارهای آتی در نظر گرفته خواهد شد که وجود این گزینه های مصرف آب، شهر صنعتی را بهتر توصیف خواهد کرد.

۴-۲- مطالعه موردی برای مدل پیشنهادی B

این بخش مثالی را برای نمایش کاربردپذیری مدل پیشنهادی B ارائه می‌دهد. مطالعه موردی مدل پیشنهادی B با هدف توزیع بهینه آب است که با حفظ سطحی ثابت از منابع طبیعی آب، تقاضاهای خانگی، کشاورزی و صنعتی شهر مورلیا (Morelia) را در دوره زمانی از سال ۲۰۱۳ تا ۲۰۲۳ را ارضا کند. شهر مورلیا (Morelia) پایتخت ایالت میچوآکان (Michoacan) در کشور مکزیک می‌باشد که بالاترین هزینه‌های آب در مکزیک را دارد. همچنین این شهر یک مشکل جدی بابت استخراج بیش از حد منابع طبیعی‌اش دارد که این شهر را به یک کسری سالیانه $2/46 \text{ m}$ از سفره‌های آب زیرزمینی سوق داده است. شهر، جمعیتی حدود ۷۲۹۲۷۹ نفر دارد و براساس اطلاعات انجمن ملی آب مکزیک مصرف آب در شهر برای استفاده عموم در طول سال ۲۰۰۹، $90,168,374.77 \text{ m}^3/\text{year}$ بوده است که یک میانگین مصرف $338/75$ لیتری برای هر روز شهر را نشان می‌دهد. در طول همان سال، فعالیت کشاورزی در شهر، $21,348,208.28 \text{ m}^3/\text{year}$ آب نیاز داشته است در حالی که فعالیت‌های صنعتی $26,005,188.32 \text{ m}^3/\text{year}$ آب مصرف کرده است. این آمار یک مصرف سالیانه $137,521,771.4 \text{ m}^3/\text{year}$ را نشان می‌دهد که با استخراج آب از چاه‌های عمیق ($43/93\%$)، سرچشمه‌ها ($33/41\%$) و سد Cointzio ($22/66\%$) جبران می‌شود. طبق انجمن ملی جمعیت، میانگین نرخ رشد جمعیت شهری برای سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۲۵، $0/27\%$ برای هر سال خواهد بود که همراه با رشد جمعیت، تقاضاها نیز افزایش خواهد یافت. گفتنی است که میزان بارش‌های ماهیانه مورد انتظار شهر طی سال‌های ۲۰۱۳ تا ۲۰۲۳ نیز مدنظر قرار گرفته است. با این اوصاف، جهت درک بهتر اثر پذیری این مدل پیشنهادی، این مدل برای سه حالت مختلف به کار گرفته شده است. حالت اول، بدون در نظر گرفتن مخازن آب و تصفیه، حالت دوم فقط استحصال آب باران را در نظر گرفته است و تصفیه آب مجاز شمرده نشده است. در نتیجه در این حالت، فاضلاب به طور مستقیم بعد از یک تصفیه مناسب به محیط زیست تخلیه می‌شود. اما در حالت سوم، به

طور همزمان استحصال آب باران و تصفیه آب در نظر گرفته شده است. گفتنی است در حل این مثال، برای محاسبه ضریب جریان، $K=0.263$ در نظر گرفته شده است که متناظر با نوع زمین و توزیع است، حداکثر ظرفیت مخازن آب $50000 m^3$ و حداکثر ظرفیت آبگیرهای مصنوعی $60000 m^3$ می باشد، همچنین ضرایب توابع هزینه در جدول (۱۰) آورده شده است و $\alpha = 1$ است و جنس لوله ها، PVC می باشد. در همین راستا، جدول (۱۱) نتایج بدست آمده از حل حالات مختلف این مثال را ارائه کرده است.

جدول ۱۰- ضرایب توابع هزینه

مخزن / ضریب	A (\$)	B (\$)	C (\$/m ³)	D (\$/m ³)
مخازن ۱-۲۰	۱۳۰۸۰	۱,۸۱۱۳۵		
مخازن ۲۰-۴۰	۲۸۰۸۰	۴,۹۱۳۴		
آبگیرهای ۱-۶			۱۱۱۹۶۸	۰,۸۸۹۵
آبگیرهای ۷-۱۲			۱۵۱۹۶۸	۴,۹۸۹۵

جدول ۱۱- خلاصه نتایج

موارد / مطالعه موردی	۱	۲	۳
منابع طبیعی برای خط اصلی خانگی	1.26×10^9	1.19×10^9	1.16×10^9
منابع طبیعی برای خط اصلی کشاورزی	2.32×10^8	1.88×10^8	5.28×10^5
منابع طبیعی برای خط اصلی صنعتی	3.55×10^8	2.71×10^8	2.10×10^8
تقاضای خانگی (m^3)	1.26×10^9	1.26×10^9	1.26×10^9
تقاضای کشاورزی (m^3)	2.32×10^8	2.32×10^8	2.32×10^8
تقاضای صنعتی (m^3)	3.55×10^8	3.55×10^8	3.55×10^8
کل فاضلاب (m^3)	1.04×10^9	1.04×10^9	1.02×10^9
تعداد مخازن آب	0	11	6
تعداد آبگیرهای مصنوعی	0	12	9
کل منابع آب جایگزین (m^3)	0	1.99×10^8	4.70×10^8
سود (\$/year)	1.14×10^9	1.37×10^9	1.40×10^9

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله دو مدل برنامه‌ریزی غیرخطی توأم با اعداد صحیح ارائه شد که مدل پیشنهادی A با هدف کاهش مصرف آب شیرین از طریق بیشینه‌سازی استفاده مجدد از آب به طور مستقیم و مدل پیشنهادی B با هدف برنامه‌ریزی ذخیره‌سازی و توزیع بهینه آب بودند. در مورد مدل پیشنهادی A نتایج نشان می‌دهد که برنامه‌ریزی طراحی شبکه برای یک دوره زمانی کامل (چند دوره‌ای) افزایش عملکرد را در مقایسه با جواب‌های بدست آمده از حل دوره‌های تک زمانی نتیجه می‌دهد. همچنین مدل پیشنهادی A نشان می‌دهد که تعداد اتصالات یا هزینه کل یا هر دو می‌توانند کاهش پیدا کنند که کاهش تعداد اتصالات به معنای کاهش پیچیدگی شبکه آبرسانی می‌باشد. از آنجایی که مدل پیشنهادی A تنها بازیافت و استفاده مجدد را به عنوان یکپارچه‌سازی آب در نظر می‌گیرد، بنابراین برنامه‌ریزی چند دوره‌ای دقیقاً می‌تواند با در نظر گرفتن حالت‌های تصفیه تعمیم پیدا کند و نیز در این مدل، مؤلفه‌های بیشتری از هزینه از قبیل هزینه‌های عملیات را می‌توان تجزیه و تحلیل کرد. در مورد مدل پیشنهادی B، این مدل می‌تواند عواملی چون رشد جمعیت، ارزش زمانی پول و تغییر در الگوی بارش به سبب تغییرات اقلیمی را در نظر بگیرد. در این مدل پیشنهادی، سه مطالعه موردی با در نظر گرفتن سیاست‌های مختلف تجزیه و تحلیل شد که می‌توان مشاهده کرد که حتی زمانی که منابع آب جایگزین مجاز شمرده نمی‌شوند، یک روش سیستماتیک برای مدیریت آب می‌تواند به حفظ سطوح پایدار منابع طبیعی آب کمک کند و زمانی که منابع آب جایگزین شمرده می‌شود، بیشتر وسایل ذخیره‌سازی در طول اولین سال پروژه نصب می‌شود، اگرچه ذخیره‌سازی اضافی برای کنترل افزایش تقاضاها نیاز می‌شود. در پایان می‌توان گفت که بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در طراحی شبکه‌های آبرسانی می‌تواند طراحی این شبکه‌ها را با هدف کاهش مصرف آب و نیز کاهش هزینه‌ها بسیار منعطف کند و بتوان تمام عوامل تأثیرگذار بر سیستم‌های آبرسانی را در نظر گرفت.

منابع

1. Aviso K.B. Tan R.R. Culaba A.B. 2010. Designing eco-industrial water exchange networks using fuzzy mathematical programming. *Clean Technol. Environ. Policy*. 12:353–363.
2. Bishnu S.K. Linke P. Alnouri S.Y. El-Halwagi M. 2014. Multiperiod planning of optimal industrial city direct water reuse networks. *Ind Eng Chem Res*. 53 (21):8844–65.
3. Boix M. Montastruc L. Pibouleau L. Pantel C.A. Domenech S. 2012. Industrial water management by multiobjective optimization: From individual to collective solution through eco-industrial parks. *J. Cleaner Prod*. 22:85–97.
4. Chakraborty A. Linninger A.A. 2002. Plant-wide waste management, synthesis and multi objective design. *Ind. Eng. Chem. Res*. 41 (18):4591–4604.
5. Chakraborty A. Colberg R.D. Linninger A.A. 2003. Plant-wide waste management, long term operation and investment planning under uncertainty. *Ind. Eng. Chem. Res*. 42:4772–4788.
6. Chakraborty A. 2009. A globally convergent mathematical model for synthesizing topologically constrained water recycles networks. *Comput. Chem. Eng*. 33:1279–1288.
7. Chen C.L. Lee J.Y. 2008. A graphical technique for the design of water-using networks in batch processes. *Chem. Eng. Sci*. 63:3740–3754.
8. Gabriel F. El-Halwagi M.M. 2005. Simultaneous Synthesis of Waste Interception and Material Reuse Networks: Problem Reformulation for Global Optimization. *Environ. Prog*. 24 (2):171–180.
9. (a) Hul S. Tan R.R. Auresenia J. Fuchino T. Foo D.C.Y. 2007. Synthesis of near optimal topologically-constrained property-based water network using swarm intelligence. *Clean Technol. Environ. Policy*. 9:27–36. (b) Hul S. Tan R. Auresenia J. Fuchino T. Foo D.C.Y. 2007. Water network synthesis using mutation-enhanced particle swarm optimization. *Process Saf. Environ. Prot*. 85 (B6):507–514.
10. Jezowski J. Poplewski G. Jezowska A. 2003. Optimization of water usage in chemical industry. *Environ. Prot. Eng*. 29:97–117.
11. Lavric V. Iancu P. Plesu V. 2005. Genetic algorithm optimization of water consumption and wastewater network topology. *J. Cleaner Prod*. 13:1395–1405.

12. Lee J.Y. Chen C.L. Lin Y. Foo D.C.Y. 2013. A two-stage approach for synthesis for synthesis of inter-plant water networks involving continuous and batch network. *Chem. Eng. Res. Des.* 92:941–953.
13. Prakotpol D. Srinophakun T. 2004. GA pinch: Genetic algorithm toolbox for water pinch technology. *Chem. Eng. Process.* 43:203–217.
14. Rojas-Torres M.G. Nápoles-Rivera F. Ponce-Ortega J.M. Serna-González M. El-Halwagi M.M. 2014. Optimal design of sustainable water systems for cities involving future projections. *Comput Chem Eng.* 69:1–15.
15. Shafiei S. Domenech S. Koteles R. Paris J. 2004. System closure in pulp and paper mills: Network analysis by genetic algorithm. *J. Cleaner Prod.* 12:131–135.
16. Tan R.R. Col-long K. Foo D.C.Y. Hul S. Ng K.S. 2008. A methodology for the design of efficient resource conservation networks using adaptive swarm intelligence. *J. Cleaner Prod.* 16:822–832.
17. Wang Z.F. Zhao H.P. Liu Z.Y. 2012. Design of water-using networks by combining the concentration potential concepts with an LP approach. *Chem. Eng. Sci.* 69:565–570.

Utilizing mathematical programming models in optimal design of water networks in industrial cities

Gholam Hassan Shirdel^{*†}, Mohammad Sheikh Akbari Mehr[†]

Received: 2020/11/3

Accepted: 2021/10/19

Abstract

parts of the world, especially in arid and semi-arid regions. One of the important parameters in the water sector is the water distribution network, which the optimal design of these water networks can have a significant impact on reducing costs and the maximize use of water resources.

For this purpose, in this paper, multiple programming models are proposed to integrate water consumption industrial cities and macroscopic systems. Both proposed mathematical models are mixed integer non-linear programming models. The objective proposed model A is to minimize fresh water consumption in industrial cities by maximizing water reuse directly, and also optimal design water networks to minimum cost for reuse of water directly, and the proposed model B is presented to objective programming the storage and optimal distribution water in a macroscopic system.

Finally, examples have been made to demonstrate the benefits of proposed models that the obtained results from the point of view of economics, storage and sustainability of water resources show the huge potential of the proposed models.

Keywords: Optimize water consumption, Mathematical programming models, Multi-period optimization, Integrated water, Storage and optimal distribution of water in industrial cities

[†]. Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Qom, Qom, IRAN.(Corresponding Author) Email: g.h.shirdel@qom.ac.ir

^{*}. Master of Science in Applied Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Qom, Qom, IRAN. Email: akbarimehr1990@gmail.com